

MAT1140

Obligatorisk oppgave 2 av 2

Innleveringsfrist

Torsdag 06. NOVEMBER 2025, klokken 14:30 i Canvas (canvas.uio.no).

Instruksjoner

Merk at man har **ett forsøk** på å få oppgaven godkjent. Dette betyr at det ikke lenger gis andregangsforsøk. På en annen side er terskelen for at en innlevert oppgave skal bli godkjent, lav (tilsvarende ett korrekt besvart spørsmål av de ti).

Du velger selv om du skriver besvarelsen for hånd og scanner besvarelsen eller om du skriver løsningen direkte inn på datamaskin (for eksempel ved bruk av L^AT_EX). Besvarelsen skal leveres som én PDF-fil. Scannede ark må være godt lesbare. Besvarelsen skal inneholde navn, emne og oblignummer.

Det forventes at man har en klar og ryddig besvarelse med tydelige begrunnelser.

Samarbeid og alle slags hjelpemidler er tillatt, men den innleverte besvarelsen skal være skrevet av deg og reflektere din forståelse av stoffet.

For å få adgang til avsluttende eksamen i dette emnet, må man bestå alle obligatoriske oppgaver i ett og samme semester.

For fullstendige retningslinjer for innlevering av obligatoriske oppgaver, se her:

www.uio.no/studier/admin/obligatoriske-aktiviteter/mn-math-oblig.html

LYKKE TIL!

Oppgave 1 (teller som fire spørsmål). Gi bevis for Proposisjon 3.3.10 i læreboka.

Ved induksjon på l . I det invertible tilfellet, også nedadgående.

Oppgave 2. La I være en ikke-tom mengde og la $A = I \times \mathbb{N}$.

(i) Definer en bijeksjon fra A til $\{0, 1\} \times A$.

Lag først en bijeksjon $\mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\} \times \mathbb{N}$.

(ii) Definer en bijeksjon fra $\mathcal{P}(A)$ til $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A)$.

Vi har bijeksjoner:

$$\mathcal{P}(A) \approx \{0, 1\}^A \approx \{0, 1\}^{\{0, 1\} \times A}, \quad (1)$$

$$\approx \{0, 1\}^A \times \{0, 1\}^A \approx \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A). \quad (2)$$

(iii) Hva skjer i disse spørsmålene hvis $I = \emptyset$?

Når $I = \emptyset$, har vi $A = \emptyset$. Da har vi også $\{0, 1\} \times A = \emptyset$.
Da er både $\mathcal{P}(A)$ og $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A)$ ettpunktsmengder.

Oppgave 3. (i) Vis ved induksjon at for hver $k \in \mathbb{N}$ er $\mathbb{N}^k$ tellbar. Gi først en plausibel definisjon av $\mathbb{N}^k$.

Prinsippet for induksjonstrinnet er at produktet av to tellbare mengder er tellbar.

(ii) En følge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i en mengde A sies å være periodisk dersom det finnes $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ slik at for hver $n \in \mathbb{N}$ har vi $u_{k+n} = u_n$. I såfall kalles en slik k en periode til u og u sies å være periodisk med periode k .

Vis at mengden av følger i $\mathbb{N}$ som er periodiske med gitt periode k er tellbar.

La k være gitt og la P_k være mengden av k -periodiske følger. Avbildningen $P_k \rightarrow \mathbb{N}^k$ som sender en følge u til $(u_0, \dots, u_{k-1})$ er en bijeksjon.

(iii) Vis at mengden av periodiske følger i $\mathbb{N}$ (med vilkårlig periode) er tellbar.

Dennne mengden kan skrives som:

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} P_k. \quad (3)$$