

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: MAT1140 — Strukturer og argumenter

Eksamensdag: Onsdag 3. desember 2025

Tid for eksamen: 15:00 – 19:00

Oppgavesettet er på 4 sider.

Vedlegg: Ingen

Tillatte hjelpemidler: Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

For hvert spørsmål kan du bruke resultater fra tidligere spørsmål, selv om du ikke har besvart dem.

Oppgavene er ikke nødvendigvis ordnet etter vanskelighetsgrad.

Det vil bli lagt spesiell vekt på argumentasjonen i besvarelsene.

Terminologi og notasjon:

- Vi anser at 0 er et naturlig tall, slik at $0 \in \mathbb{N}$.

Oppgave 1 (vekt 20 poeng)

a (vekt 10 poeng)

La P, Q og R være utsagnsvariable (utsagn med ukjent sannhetsverdi). Bestem om følgende sammensatte utsagn er en tautologi:

$$\left((P \wedge Q) \implies R \right) \iff \left(P \implies (Q \implies R) \right). \quad (1.1)$$

Vi har:

$$\left(P \implies (Q \implies R) \right) \iff \neg P \vee (\neg Q \vee R), \quad (1.2)$$

$$\iff (\neg P \vee \neg Q) \vee R, \quad (1.3)$$

$$\iff \neg(P \wedge Q) \vee R, \quad (1.4)$$

$$\iff (P \wedge Q) \implies R. \quad (1.5)$$

Dermed er det en tautologi.

(Fortsettes på side 2.)

b (vekt 10 poeng)

La A , B og C være tre vilkårlige mengder.

Er det sant at $(A \cap B) \subseteq C$ hvis og bare hvis $(A \subseteq C$ eller $B \subseteq C)$?

Gjelder implikasjon mellom disse to utsagnene den ene veien? Begrunn svaret ditt.

Vi har implikasjon:

$$(A \subseteq C \vee B \subseteq C) \implies (A \cap B) \subseteq C. \quad (1.6)$$

La $A = \{0, 1\}$, $B = \{1, 2\}$ og $C = \{1\}$. Dette eksempelet viser at implikasjon ikke gjelder andre veien.

Oppgave 2 (vekt 40 poeng)

Vi lar A være mengden av følger i $\mathbb{N}$. Et element i A er altså en følge $u = (u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ der $u_k \in \mathbb{N}$ for hver $k \in \mathbb{N}$.

Vi definerer en relasjon R på A ved at når $u, v \in A$ har vi uRv hvis og bare hvis:

$$\exists k \in \mathbb{N} \forall l \in \mathbb{N} \quad l \geq k \implies u_l \leq v_l. \quad (2.1)$$

a (vekt 10 poeng)

Vis at R er refleksiv og transitiv.

[4] Vi har:

$$\forall l \in \mathbb{N} \quad u_l \leq u_l. \quad (2.2)$$

Dermed er uRu . Altså er R refleksiv.

[6] Anta at uRv og at vRw . Velg k slik at:

$$\forall l \in \mathbb{N} \quad l \geq k \implies u_l \leq v_l. \quad (2.3)$$

Velg k' slik at:

$$\forall l \in \mathbb{N} \quad l \geq k' \implies v_l \leq w_l. \quad (2.4)$$

Sett $k'' = \max\{k, k'\}$. For $l \geq k''$ har vi både $u_l \leq v_l$ og $v_l \leq w_l$, dermed $u_l \leq w_l$.

b (vekt 10 poeng)

Vis at R ikke er symmetrisk.

Vi lar u være den konstante følgen 0 og v være den konstante følgen 1. Da har vi uRv men ikke vRu . Dermed er R ikke symmetrisk.

c (vekt 10 poeng)

Vis at R ikke er antisymmetrisk.

(Fortsettes på side 3.)

Vi har u være den konstante følgen 0 og v være definert som 0 i alle indekser unntatt 0 hvor verdien er 1. Da er uRv og vRu men $u \neq v$. Dermed er R ikke antisymmetrisk.

d (vekt 10 poeng)

For hver $n \in \mathbb{N}$ lar vi $u[n]$ være den konstante følgen med verdi n . Det vil si at for alle $k \in \mathbb{N}$, $u[n]_k = n$.

Vis at for alle $m, n \in \mathbb{N}$ har vi:

$$m \leq n \iff u[m]Ru[n]. \quad (2.5)$$

La også v være identitetsfølgen. Det vil si at for alle $k \in \mathbb{N}$, $v_k = k$.

Vis at for alle $n \in \mathbb{N}$ har vi $u[n]Rv$.

Anta at $m \leq n$. Da har vi for all $l \in \mathbb{N}$ at $u[m]_l = m \leq n = u[n]_l$.
 Dermed $u[m]Ru[n]$.
 Anta at $u[m]Ru[n]$. Velg $k \in \mathbb{N}$ slik at for $l \geq k$ har vi $u[m]_l \leq u[n]_l$.
 Det betyr $m \leq n$.
 La $n \in \mathbb{N}$. for $l \geq n$ har vi $u[n]_l = n \leq l = v_l$. Dermed $u[n]Rv$.

Oppgave 3 (vekt 20 poeng)

Vi antar at A er en mengde og at vi har en injeksjon $f : A \rightarrow A$ og en surjeksjon $g : A \rightarrow A$.

a (vekt 10 poeng)

I dette spørsmålet antar vi i tillegg at A er endelig. Vis at da er $g \circ f$ en bijeksjon.

Når A er endelig, og h er en avbildning $A \rightarrow A$ er injektivitet, surjektivitet og bijektivitet av h ekvivalente utsagn.
 I dette tilfellet får vi at f er bijektiv og at g er bijektiv. Dermed er $g \circ f$ bijektiv.

b (vekt 10 poeng)

I dette spørsmålet antar vi at $A = \mathbb{N}$. Finn et eksempel på en injektiv $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ og en surjektiv $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, slik at $g \circ f$ er en konstant funksjon.

Vi lar $f : k \mapsto 2k$. Da er f injektiv.
 Vi definerer $g(n)$ ved at hvis $n = 2k$ så $g(n) = 0$ og hvis $n = 2k + 1$ så $g(n) = k$. Da er g surjektiv siden for hver $k \in \mathbb{N}$, $k = g(2k + 1)$.
 Da har vi at $g(f(k)) = g(2k) = 0$ så $g \circ f = 0$.

(Fortsettes på side 4.)

Oppgave 4 (vekt 20 poeng)

La $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Definer $\Phi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, ved at for alle $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ har vi:

$$\Phi(m, n) = a^m b^n. \quad (4.1)$$

a (vekt 10 poeng)

Vi utstyrer $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ med en operasjon kalt addisjon definert ved:

$$(m, n) + (m', n') = (m + m', n + n'). \quad (4.2)$$

Hva er det nøytrale elementet?

Vi utstyrer $\mathbb{N}$ med sin vanlige multiplikasjon. Hva er det nøytrale elementet?

Vis at Φ er en monoide morfi fra $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (med denne addisjonen) til $\mathbb{N}$ (med denne multiplikasjonen).

Det nøytrale elementet for addisjonen er $(0, 0)$. For multiplikasjonen er det 1.

Vi har $\Phi(0, 0) = a^0 b^0 = 1$. Vi har også at:

$$\Phi((m, n) + (m', n')) = \Phi(m + m', n + n'), \quad (4.3)$$

$$= a^{m+m'} b^{n+n'}, \quad (4.4)$$

$$= a^m b^n a^{m'} b^{n'}, \quad (4.5)$$

$$= \Phi(m, n) \Phi(m', n'). \quad (4.6)$$

Dermed er Φ en monoide morfi.

b (vekt 10 poeng)

Anta at a og b er innbyrdes primiske. Vis at Φ er injektiv.

Anta at $\Phi(m, n) = \Phi(m', n')$. Det vil si $a^m b^n = a^{m'} b^{n'}$.

Anta for eksempel for motsigelse at $m > m'$. Da får vi $a^{m-m'} b^n = b^{n'}$.

Da må $n' > n$ så vi får $a^{m-m'} = b^{n'-n}$.

Dette viser at a deler $b^{n'-n}$. Siden a også er innbyrdes primisk med b kan vi ved nedadgående induksjon utlede at a deler b . Så da har de en ikke-triviell felles faktor, nemlig a .

SLUTT