MAT1140 – Forelesningsnotater

Høsten 2026

Innhold

1 Logikk og bevis **5**

1.1 Utsagnslogikk 5

1.2 Bevis i utsagnslogikk 7

Kapittel 1

Logikk og bevis

Målet vårt i dette kapitlet er å vise at alle matematiske utsagn i prinsippet kan kodes med formelle uttrykk som involverer symboler som

$$\wedge,\ \vee,\ \neg,\ \Rightarrow,\ \forall,\ \exists,\ \ldots$$

Dette hjelper oss blant annet med å forstå hvilke bevisteknikker som kan brukes i ulike tilfeller.

For eksempel vil definisjonen av kontinuitet av en funksjon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se slik ut:

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y \in \mathbb{R} \quad \big(|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon\big).$$

Som vi ser er dette komplisert! Det kan forklare litt hvorfor kontinuitetsbevis er vanskelige.

Bevis skal i prinsippet kunne gjøres så formelle at de kan sjekkes av en datamaskin; såkalte *formelle bevis*. Men vi går ikke helt dit.

1.1 Utsagnslogikk

Utsagn: En setning som enten er sann eller usann.

Eksempler:

- 3 er et primtall.
- $1 + 2 = 3$.
- 4 er et primtall.
- $1 + 2 = 7$.

Ikke-eksempler:

- $1 + 2$ (kun et uttrykk; det har ingen sannhetsverdi).
- $x + 2 = 3$ (avhenger av x; umulig å si før vi gir x en verdi).
- $1+ = 2$ (ugyldig setning).

Interessant eksempel: "Alle partall større enn eller lik 4 kan skrives som en sum av to primtall."

Dette er helt klart sant eller usant, altså et utsagn, men ingen vet svaret (Goldbachs formodning).

Hva med: "Denne setningen er usann."

Paradoks! Vi må passe på å bygge opp logikken vår slik at slike setninger ikke kan formuleres.

Logiske konnektiver

Vi bruker variabler som $P, Q, R, \ldots$ for å betegne utsagn. Symbolet $\top$ brukes for verdien "sann" og $\bot$ for "usann" (ofte også 1 og 0).

Negasjon. Gitt P, har vi utsagnet $\neg P$, uttalt "ikke P", definert ved sannhetstabellen

P	$\neg P$
$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$

Altså er $\neg P$ usann om P er sann, og sann om P er usann.

Gitt P, Q har vi:

Konjunksjon:	$P \wedge Q$	"P og Q"
Disjunksjon:	$P \vee Q$	"P eller Q"
Implikasjon:	$P \Rightarrow Q$	"P impliserer Q"
Ekvivalens:	$P \Leftrightarrow Q$	"P er ekvivalent med Q".

Sannhetstabellen som definerer disse konnektivene er som følger:

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$

Merk:

- $P \vee Q$ er sann når minst én av P og Q er sann, ulikt i dagligtale når vi sier "enten ... eller ...".
- $P \Rightarrow Q$ kan være forvirrende, men tenk på det som at Q er "minst like sann" som P: $P \Rightarrow Q$ er kun usann når P er sann og Q er usann.

Sammensatte utsagn

Vi kan bruke de logiske konnektivene til å danne sammensatte utsagn, for eksempel

$$\neg Q \Rightarrow \neg P.$$

Fra sannhetstabellen ser vi at dette uttrykket tar de samme verdiene som $P \Rightarrow Q$:

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg Q$	$\neg P$	$\neg Q \Rightarrow \neg P$
$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$

Vi sier at $P \Rightarrow Q$ og $\neg Q \Rightarrow \neg P$ er *logisk ekvivalente*.

Et sammensatt utsagn som alltid er sant kalles en *tautologi*, for eksempel

$$(P \wedge (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow Q.$$

Det finnes mange tautologier. Her er noen:

$$\begin{aligned}
(P \Rightarrow Q) &\Leftrightarrow (\neg P \vee Q),\\
(P \Leftrightarrow Q) &\Leftrightarrow (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P),\\
\neg\neg P &\Leftrightarrow P,\\
\neg(P \wedge Q) &\Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q,\\
\neg(P \vee Q) &\Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q,\\
P \wedge (Q \wedge R) &\Leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge R,\\
P \vee (Q \vee R) &\Leftrightarrow (P \vee Q) \vee R,\\
P \wedge (Q \vee R) &\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R),\\
P \vee (Q \wedge R) &\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R).
\end{aligned}$$

Se boka side 15–18 for flere.

Eksempel 1.1. Vi kan bruke tautologiene over for å utlede flere. For eksempel kan tautologien

$$((P \wedge Q) \Rightarrow R) \Leftrightarrow (P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)).$$

Utledes ved følgende, der vi bruker tre av tautologiene fra lista over (1, 4 og 7):

$$\begin{aligned}
(P \wedge Q) \Rightarrow R &\Leftrightarrow \neg(P \wedge Q) \vee R\\
&\Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q) \vee R\\
&\Leftrightarrow \neg P \vee (\neg Q \vee R)\\
&\Leftrightarrow P \Rightarrow (Q \Rightarrow R).
\end{aligned}$$

1.2 Bevis i utsagnslogikk

Bevis, uformelt sett: overbevisende argument for at et gitt utsagn er sant.

Litt mer formelt: Bevis for et mål P gitt $Q_1, \ldots, Q_n$ er en sekvens av logisk gyldige deduksjoner der vi kan bruke antagelsene våre $Q_1, \ldots, Q_n$ og ender med P.

Vi går gjennom

- bevisteknikker for å bevise diverse logiske utsagn, og viser strukturen et tilsvarende bevis har;
- slutningsregler som sier hvordan vi kan bruke de logiske konnektivene til å trekke diverse slutninger.

Bevis med implikasjon

Bevisteknikk 1. For å bevise $P \Rightarrow Q$, anta P og utled Q.

Det ser typisk slik ut:

Bevis for $P \Rightarrow Q$:
    Anta P.
    (*Bevis for* Q)
Vi konkluderer med $P \Rightarrow Q$.

Eksempel 1.2. La P og Q være utsagn. Bevis

$$P \Rightarrow (Q \Rightarrow P).$$

Løsning:

Vi beviser $P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$:
    Anta P. (*Bevisteknikk 1. Målet er nå $Q \Rightarrow P$.*)
        Anta Q. (*Bevisteknikk 1 igjen. Målet er nå P.*)
        Vi har allerede P fra en tidligere antagelse.
    Vi konkluderer med $Q \Rightarrow P$.
Vi konkluderer med $P \Rightarrow Q$.

Merk at vi også kan etablere $P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$ som en tautologi ved å lage en sannhetstabell. Poenget her er at den formelle teknikken in Bevisteknikk 1 også kan brukes til å skrive et bevis for tautologien.