MAT1140 – Forelesningsnotater

Høsten 2026

Innhold

1 Logikk og bevis **5**

1.1 Utsagnslogikk 5

1.2 Bevis i utsagnslogikk 7

Kapittel 1

Logikk og bevis

Målet vårt i dette kapitlet er å vise at alle matematiske utsagn i prinsippet kan kodes med formelle uttrykk som involverer symboler som

$$\wedge,\ \vee,\ \neg,\ \Rightarrow,\ \forall,\ \exists,\ \ldots$$

Dette hjelper oss blant annet med å forstå hvilke bevisteknikker som kan brukes i ulike tilfeller.

For eksempel vil definisjonen av kontinuitet av en funksjon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se slik ut:

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y \in \mathbb{R} \quad \big(|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon\big).$$

Som vi ser er dette komplisert! Det kan forklare litt hvorfor kontinuitetsbevis er vanskelige.

Bevis skal i prinsippet kunne gjøres så formelle at de kan sjekkes av en datamaskin; såkalte *formelle bevis*. Men vi går ikke helt dit.

1.1 Utsagnslogikk

Utsagn: En setning som enten er sann eller usann.

Eksempler:

- 3 er et primtall.
- $1 + 2 = 3$.
- 4 er et primtall.
- $1 + 2 = 7$.

Ikke-eksempler:

- $1 + 2$ (kun et uttrykk; det har ingen sannhetsverdi).
- $x + 2 = 3$ (avhenger av x; umulig å si før vi gir x en verdi).
- $1+ = 2$ (ugyldig setning).

Interessant eksempel: "Alle partall større enn eller lik 4 kan skrives som en sum av to primtall."

Dette er helt klart sant eller usant, altså et utsagn, men ingen vet svaret (Goldbachs formodning).

Hva med: "Denne setningen er usann."

Paradoks! Vi må passe på å bygge opp logikken vår slik at slike setninger ikke kan formuleres.

Logiske konnektiver

Vi bruker variabler som $P, Q, R, \ldots$ for å betegne utsagn. Symbolet $\top$ brukes for verdien "sann" og $\bot$ for "usann" (i boka brukes 1 og 0).

Negasjon: Gitt P, har vi utsagnet $\neg P$, uttalt "ikke P", definert ved sannhetstabellen

P	$\neg P$
$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$

Altså er $\neg P$ usann om P er sann, og sann om P er usann.

Gitt P, Q har vi:

Konjunksjon:	$P \wedge Q$	"P og Q"
Disjunksjon:	$P \vee Q$	"P eller Q"
Implikasjon:	$P \Rightarrow Q$	"P impliserer Q"
Ekvivalens:	$P \Leftrightarrow Q$	"P er ekvivalent med Q".

Sannhetstabellen som definerer disse konnektivene er som følger:

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$

Merk:

- $P \vee Q$ er sann når minst én av P og Q er sann, ulikt i dagligtale når vi sier "enten ... eller ...".
- $P \Rightarrow Q$ kan være forvirrende, men tenk på det som at Q er "minst like sann" som P: $P \Rightarrow Q$ er kun usann når P er sann og Q er usann.

Sammensatte utsagn

Vi kan bruke de logiske konnektivene til å danne sammensatte utsagn, for eksempel

$$\neg Q \Rightarrow \neg P.$$

Fra sannhetstabellen ser vi at dette uttrykket tar de samme verdiene som $P \Rightarrow Q$:

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg Q$	$\neg P$	$\neg Q \Rightarrow \neg P$
$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$

Vi sier at $P \Rightarrow Q$ og $\neg Q \Rightarrow \neg P$ er *logisk ekvivalente*.

Et sammensatt utsagn som alltid er sant kalles en *tautologi*, for eksempel

$$(P \wedge (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow Q.$$

Det finnes mange tautologier. Her er noen:

$$\begin{aligned}
(P \Rightarrow Q) &\Leftrightarrow (\neg P \vee Q),\\
(P \Leftrightarrow Q) &\Leftrightarrow (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P),\\
\neg\neg P &\Leftrightarrow P,\\
\neg(P \wedge Q) &\Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q,\\
\neg(P \vee Q) &\Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q,\\
P \wedge (Q \wedge R) &\Leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge R,\\
P \vee (Q \vee R) &\Leftrightarrow (P \vee Q) \vee R,\\
P \wedge (Q \vee R) &\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R),\\
P \vee (Q \wedge R) &\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R).
\end{aligned}$$

Se boka side 15–18 for flere.

Eksempel 1.1. Vi kan bruke tautologiene over for å utlede flere. For eksempel kan tautologien

$$((P \wedge Q) \Rightarrow R) \Leftrightarrow (P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)).$$

Utledes ved følgende, der vi bruker tre av tautologiene fra lista over (1, 4 og 7):

$$\begin{aligned}
(P \wedge Q) \Rightarrow R &\Leftrightarrow \neg(P \wedge Q) \vee R\\
&\Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q) \vee R\\
&\Leftrightarrow \neg P \vee (\neg Q \vee R)\\
&\Leftrightarrow P \Rightarrow (Q \Rightarrow R).
\end{aligned}$$

1.2 Bevis i utsagnslogikk

Bevis, uformelt sett: overbevisende argument for at et gitt utsagn er sant.

Litt mer formelt: Bevis for et mål P gitt $Q_1, \ldots, Q_n$ er en sekvens av logisk gyldige deduksjoner der vi kan bruke antagelsene våre $Q_1, \ldots, Q_n$ og ender med P.

Vi går gjennom

- bevisteknikker for å bevise diverse logiske utsagn, og viser strukturen et tilsvarende bevis har;
- slutningsregler som sier hvordan vi kan bruke de logiske konnektivene til å trekke diverse slutninger.

Bevis med implikasjon

Følgende dekkes av Prinsipp 1.4.1 i [1].

Bevisteknikk 1. For å bevise $P \Rightarrow Q$, anta P og utled Q.

Det ser typisk slik ut:

Bevis for $P \Rightarrow Q$:
    Anta P.
    (*Bevis for* Q)
Vi konkluderer med $P \Rightarrow Q$.

Merk at der det står (*Bevis for* Q) må vi fylle inn et faktisk bevis for utsagnet Q, der vi fritt kan benytte antagelsen P. Hvordan dette beviset for Q faktisk utarter seg kommer an på konteksten. Likevel vil strukturen ellers i et bevis for en implikasjon typisk se ut som over.

For å øve oss kan vi bruke Bevisteknikk 1 til å vise at $P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$ er en tautologi.

Eksempel 1.2. La P og Q være utsagn. Bevis

$$P \Rightarrow (Q \Rightarrow P).$$

Løsning:

Vi beviser $P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$:
Anta P. (*Bevisteknikk 1. Målet er nå* $Q \Rightarrow P$.)
Anta Q. (*Bevisteknikk 1. Målet er nå* P.)
Vi har allerede P fra en tidligere antagelse.
Vi konkluderer med $Q \Rightarrow P$.
Vi konkluderer med $P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$.

Vi introduserer første slutningsregel. Den regnes som fundamental i logikk og kalles gjerne *modus ponens*.

Slutningsregel 1. Om vi har P og $P \Rightarrow Q$, kan vi konkludere med Q.

Vi beviser nok en tautologi for å øve oss på bruken av bevisteknikkene og slutningsreglene.

Eksempel 1.3. La P og Q være utsagn. Bevis

$$P \Rightarrow ((P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q).$$

Løsning:

Vi beviser $P \Rightarrow ((P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q)$:
Anta P. (*Bevisteknikk 1. Målet er nå* $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q$)
Anta $P \Rightarrow Q$. (*Bevisteknikk 1 igjen. Målet er nå* Q)
Vi har P og $P \Rightarrow Q$, så vi får Q. (*Slutningsregel 1)*
Vi konkluderer med $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q$.
Vi konkluderer med $P \Rightarrow ((P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q)$.

Bevis med konjunksjon

Bevisteknikk 2. For å bevise $P \wedge Q$, bevis P og Q hver for seg.

Det ser typisk slik ut:

Bevis for $P \wedge Q$:
Bevis 1:
Vi viser P:
(*Bevis for* P)
Bevis 2:
Vi viser Q:
(*Bevis for* Q)
Vi konkluderer med $P \wedge Q$.

Slutningsregel 2. Følgende gjelder:

(i) Om vi har gitt P og vi har gitt Q, kan vi konkludere med $P \wedge Q$.
(ii) Om vi har gitt $P \wedge Q$, kan vi konkludere med P. Om vi har gitt $P \wedge Q$, kan vi også konkludere med Q.

Følgende eksempel illustrerer bruk av Bevisteknikk 2 og Slutningsregel 2.

Eksempel 1.4. La P, Q og R være utsagn. Anta at $P \Rightarrow (Q \wedge R)$ holder. Vis at $(P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow R)$ holder.

Løsning:

Anta at $P \Rightarrow (Q \wedge R)$ holder.
Vi beviser $(P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow R)$:
Bevis 1: (*Bevisteknikk 2*)

Vi viser først $P \Rightarrow Q$:

Anta P. (*Bevisteknikk 1. Målet er nå Q*)
Vi har P og $P \Rightarrow (Q \wedge R)$, som gir $Q \wedge R$. (*Slutningsregel 1*)
Spesielt har vi Q. (*Slutningsregel 2*)

Vi konkluderer med $P \Rightarrow Q$.

Bevis 2:

Deretter viser vi $P \Rightarrow R$:

Anta P. (*Bevisteknikk 1. Målet er nå R*)
Vi har P og $P \Rightarrow (Q \wedge R)$, som gir $Q \wedge R$. (*Slutningsregel 1*)
Spesielt har vi R. (*Slutningsregel 2*)

Vi konkluderer med $P \Rightarrow R$.

Vi konkluderer med $(P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow R)$.

Bevis med disjunksjon

Bevisteknikk 3. Om du har $P \vee Q$ og skal bevise R, del opp i to tilfeller: ett der du har P og skal bevise R, og ett der du har Q og skal bevise R.

Det ser typisk slik ut:

Vi vet at $P \vee Q$ holder.
Bevis for R:
Tilfelle 1:

Anta P.
(*Bevis for R*)

Tilfelle 2:

Anta Q.
(*Bevis for R)*

I hvert tilfelle stemmer R, så vi konkluderer med R.

Slutningsregel 3. Om du har P eller har Q, kan du slutte $P \vee Q$.

Eksempel 1.5. La P, Q og R være påstander slik at $P \wedge (Q \vee R)$. Bevis at $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$.

Løsning:

Vi vet at $P \wedge (Q \vee R)$.
Vi beviser $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
Fra $P \wedge (Q \vee R)$ slutter vi P. (*Slutningsregel 2*)
Fra $P \wedge (Q \vee R)$ slutter vi $Q \vee R$. (*Slutningsregel 2*)
Tilfelle 1: (*Bevisteknikk 3 på $Q \vee R$*)
    Anta Q.
    Siden vi har P og Q, slutter vi $P \wedge Q$. (*Slutningsregel 2*)
    Spesielt har vi da $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$. (*Slutningsregel 3*)
Tilfelle 2:
    Anta R.
    Siden vi har P og R, slutter vi $P \wedge R$. (*Slutningsregel 2*)
    Spesielt har vi da $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$. (*Slutningsregel 3*)
I hvert tilfelle stemmer $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$, så vi konkluderer med $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$.

Bevis med negasjon

Den vanligste måten å vise $\neg P$ på er å anta P og utlede en usannhet, altså $\bot$. Dette er typisk noe som åpenbart er usant, ofte $Q \wedge \neg Q$ for et eller annet utsagn Q. En slik usannhet kalles ofte en selvmotsigelse, eller noe "absurd". Denne bevisteknikken kan begrunnes med at $\neg P$ og $P \Rightarrow \bot$ er logisk ekvivalente. Bevisteknikk 4 under kan dermed ses på som et spesialtilfelle av Bevisteknikk 1.

Bevisteknikk 4. For å bevise $\neg P$, anta P og utled en usannhet.

Det ser typisk slik ut:

Bevis for $\neg P$:
    Anta P.
    (*Bevis for $\bot$*)
Vi konkluderer med $\neg P$.

Om vi bruker at P og $\neg(\neg P)$ er logisk ekvivalente, ser vi at vi kan også bruke teknikken over på følgende måte: For å vise P, anta $\neg P$ og utled en usannhet. Dette kalles ofte for *selvmotsigelsesbevis*. Vi kan gjerne kalle Bevisteknikk 4 for selvmotsigelsesbevis også, men logikere liker å skille de to.

Eksempel 1.6. Anta at $\neg P \wedge \neg Q$ holder. Bevis at $\neg(P \vee Q)$.

Løsning:

Vi antar $\neg P \wedge \neg Q$.
Vi skal nå vise $\neg(P \vee Q)$.
    For å oppnå en selvmotsigelse, anta $P \vee Q$. (*Bevisteknikk 3. Målet er nå $\bot$*)
        Tilfelle 1: P holder. (*Bevisteknikk 4*)
        Vi har $\neg P \wedge \neg Q$, som spesielt gir $\neg P$. (*Slutningsregel 2*)
        Fra P og $\neg P$ konkluderer vi med $P \wedge \neg P$, som er en selvmotsigelse. (*Slutningsregel 2*)
        Tilfelle 2: Q holder.
        Vi har $\neg P \wedge \neg Q$, som spesielt gir $\neg Q$. (*Slutningsregel 2*)
        Fra Q og $\neg Q$ konkluderer vi med $Q \wedge \neg Q$, som er en selvmotsigelse.
    I hvert tilfelle oppnådde vi en selvmotsigelse.
Vi konkluderer med $\neg(P \vee Q)$.

Vi har sett tidligere at $P \Rightarrow Q$ og $\neg Q \Rightarrow \neg P$ er logisk ekvivalente. For å bevise implikasjonen $P \Rightarrow Q$, kan vi med andre ord bevise $\neg Q \Rightarrow \neg P$ i stedet. Et slikt bevis kalles et *kontrapositivt* bevis.

Bevisteknikk 5. For å bevise $P \Rightarrow Q$, anta $\neg Q$ og utled $\neg P$.

I seksjonen for bevis med disjunksjon ga vi ikke en konkret teknikk for å bevise $P \vee Q$. Vi kan nå formulere en slik teknikk, som er basert på tautologien $(P \vee Q) \Leftrightarrow (\neg P \Rightarrow Q)$. Denne teknikken er ikke alltid naturlig å bruke, man må se litt an situasjonen.

Bevisteknikk 6. For å bevise $P \vee Q$, anta $\neg P$ og utled Q.

Eksempel 1.7. Anta at $\neg(P \wedge Q)$ holder. Bevis at $\neg P \vee \neg Q$ holder.

Vi antar $\neg(P \wedge Q)$.
Vi beviser $\neg P \vee \neg Q$:
Anta $\neg(\neg P)$. (*Bevisteknikk 6. Målet er nå* $\neg Q$)
Vi har P og $\neg(\neg P) \Rightarrow P$, så vi får P. (*Slutningsregel 1*)
Anta Q. (*Bevisteknikk 4. Målet er nå* $\perp$)
Vi har P og Q, så vi kan slutte $P \wedge Q$. (*Slutningsregel 2*)
Fra $P \wedge Q$ og $\neg(P \wedge Q)$ slutter vi $(P \wedge Q) \wedge \neg(P \wedge Q)$, en selvmotsigelse. (*Sl.regel 2*)
Vi konkluderer med $\neg Q$.
Vi konkluderer med $\neg P \vee \neg Q$.

Bevis med ekvivalens

Bevis for ekvivalens $P \Leftrightarrow Q$ er rett fram. Vi bruker simpelthen at $P \Leftrightarrow Q$ er logisk ekvivalent med $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$. Følgende bevisteknikk kan dermed utledes fra Bevisteknikk 2:

Bevisteknikk 7. For å bevise $P \Leftrightarrow Q$, bevis $P \Rightarrow Q$ og $Q \Rightarrow P$ hver for seg.

Det ser typisk slik ut:

Bevis for $P \Leftrightarrow Q$:
Bevis 1:
Vi viser $P \Rightarrow Q$:
(*Bevis for* $P \Rightarrow Q$)
Bevis 2:
Vi viser $Q \Rightarrow P$:
(*Bevis for* $Q \Rightarrow P$)
Vi konkluderer med $P \Leftrightarrow Q$.

Merknad. Noen av bevisteknikkene og slutningsreglene kan kanskje oppleves litt pedantiske eller slaviske. Poenget her har vært å vise at et bevis kan reduseres til noen minste byggestener. Målet er at bruk av disse teknikkene skal gå mye mer på automatikk etter hvert. Likevel tror jeg det kan være instruktivt å se hvordan det ville sett ut dersom man begrunner hvert minste lille steg, slik vi har gjort her.