MAT1140 – Forelesningsnotater

Høsten 2026

Innhold

1 Logikk og bevis **5**

1.1 Utsagnslogikk 5

1.2 Bevis i utsagnslogikk 7

1.3 Predikatlogikk 11

1.4 Bevis i predikatlogikk 14

2 Mengder og funksjoner **17**

2.1 De første aksiomene 17

Kapittel 1

Logikk og bevis

Målet vårt i dette kapitlet er å vise at alle matematiske utsagn i prinsippet kan kodes med formelle uttrykk som involverer symboler som

$$\wedge,\ \vee,\ \neg,\ \Rightarrow,\ \forall,\ \exists,\ \ldots$$

Dette hjelper oss blant annet med å forstå hvilke bevisteknikker som kan brukes i ulike tilfeller.

For eksempel vil definisjonen av kontinuitet av en funksjon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se slik ut:

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y \in \mathbb{R} \quad \big(|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon\big).$$

Som vi ser er dette komplisert! Det kan forklare litt hvorfor kontinuitetsbevis er vanskelige.

Bevis skal i prinsippet kunne gjøres så formelle at de kan sjekkes av en datamaskin; såkalte *formelle bevis*. Men vi går ikke helt dit.

1.1 Utsagnslogikk

Utsagn: En setning som enten er sann eller usann.

Eksempler:

- 3 er et primtall.
- $1 + 2 = 3$.
- 4 er et primtall.
- $1 + 2 = 7$.

Ikke-eksempler:

- $1 + 2$ (kun et uttrykk; det har ingen sannhetsverdi).
- $x + 2 = 3$ (avhenger av x; umulig å si før vi gir x en verdi).
- $1+ = 2$ (ugyldig setning).

Interessant eksempel: "Alle partall større enn eller lik 4 kan skrives som en sum av to primtall."

Dette er helt klart sant eller usant, altså et utsagn, men ingen vet svaret (Goldbachs formodning).

Hva med: "Denne setningen er usann."

Paradoks! Vi må passe på å bygge opp logikken vår slik at slike setninger ikke kan formuleres.

Logiske konnektiver

Vi bruker variabler som $P, Q, R, \ldots$ for å betegne utsagn. Symbolet $\top$ brukes for verdien "sann" og $\bot$ for "usann" (i boka brukes 1 og 0).

Negasjon: Gitt P, har vi utsagnet $\neg P$, uttalt "ikke P", definert ved sannhetstabellen

P	$\neg P$
$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$

Altså er $\neg P$ usann om P er sann, og sann om P er usann.

Gitt P, Q har vi:

Konjunksjon:	$P \wedge Q$	"P og Q"
Disjunksjon:	$P \vee Q$	"P eller Q"
Implikasjon:	$P \Rightarrow Q$	"P impliserer Q"
Ekvivalens:	$P \Leftrightarrow Q$	"P er ekvivalent med Q".

Sannhetstabellen som definerer disse konnektivene er som følger:

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$

Merk:

- $P \vee Q$ er sann når minst én av P og Q er sann, ulikt i dagligtale når vi sier "enten ... eller ...".
- $P \Rightarrow Q$ kan være forvirrende, men tenk på det som at Q er "minst like sann" som P: $P \Rightarrow Q$ er kun usann når P er sann og Q er usann.

Sammensatte utsagn

Vi kan bruke de logiske konnektivene til å danne sammensatte utsagn, for eksempel

$$\neg Q \Rightarrow \neg P.$$

Fra sannhetstabellen ser vi at dette uttrykket tar de samme verdiene som $P \Rightarrow Q$:

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg Q$	$\neg P$	$\neg Q \Rightarrow \neg P$
$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$

Vi sier at $P \Rightarrow Q$ og $\neg Q \Rightarrow \neg P$ er *logisk ekvivalente*.

Et sammensatt utsagn som alltid er sant kalles en *tautologi*, for eksempel

$$(P \wedge (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow Q.$$

Det finnes mange tautologier. Her er noen:

$$\begin{aligned}
(P \Rightarrow Q) &\Leftrightarrow (\neg P \vee Q),\\
(P \Leftrightarrow Q) &\Leftrightarrow (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P),\\
\neg\neg P &\Leftrightarrow P,\\
\neg(P \wedge Q) &\Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q,\\
\neg(P \vee Q) &\Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q,\\
P \wedge (Q \wedge R) &\Leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge R,\\
P \vee (Q \vee R) &\Leftrightarrow (P \vee Q) \vee R,\\
P \wedge (Q \vee R) &\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R),\\
P \vee (Q \wedge R) &\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R).
\end{aligned}$$

Se boka side 15–18 for flere.

Eksempel 1.1. Vi kan bruke tautologiene over for å utlede flere. For eksempel kan tautologien

$$((P \wedge Q) \Rightarrow R) \Leftrightarrow (P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)).$$

Utledes ved følgende, der vi bruker tre av tautologiene fra lista over (1, 4 og 7):

$$\begin{aligned}
(P \wedge Q) \Rightarrow R &\Leftrightarrow \neg(P \wedge Q) \vee R\\
&\Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q) \vee R\\
&\Leftrightarrow \neg P \vee (\neg Q \vee R)\\
&\Leftrightarrow P \Rightarrow (Q \Rightarrow R).
\end{aligned}$$

1.2 Bevis i utsagnslogikk

Bevis, uformelt sett: overbevisende argument for at et gitt utsagn er sant.

Litt mer formelt: Bevis for et mål P gitt $Q_1, \ldots, Q_n$ er en sekvens av logisk gyldige deduksjoner der vi kan bruke antagelsene våre $Q_1, \ldots, Q_n$ og ender med P.

Vi går gjennom

- bevisteknikker for å bevise diverse logiske utsagn, og viser strukturen et tilsvarende bevis har;
- slutningsregler som sier hvordan vi kan bruke de logiske konnektivene til å trekke diverse slutninger.

Bevis med implikasjon

Følgende dekkes av Prinsipp 1.4.1 i [1].

Bevisteknikk 1. For å bevise $P \Rightarrow Q$, anta P og utled Q.

Det ser typisk slik ut:

Bevis for $P \Rightarrow Q$:
    Anta P.
    (*Bevis for* Q)
Vi konkluderer med $P \Rightarrow Q$.

Merk at der det står (*Bevis for* Q) må vi fylle inn et faktisk bevis for utsagnet Q, der vi fritt kan benytte antagelsen P. Hvordan dette beviset for Q faktisk utarter seg kommer an på konteksten. Likevel vil strukturen ellers i et bevis for en implikasjon typisk se ut som over.

For å øve oss kan vi bruke Bevisteknikk 1 til å vise at $P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$ er en tautologi.

Eksempel 1.2. La P og Q være utsagn. Bevis

$$P \Rightarrow (Q \Rightarrow P).$$

Løsning:

Vi beviser $P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$:
Anta P. (*Bevisteknikk 1. Målet er nå* $Q \Rightarrow P$.)
Anta Q. (*Bevisteknikk 1. Målet er nå* P.)
Vi har allerede P fra en tidligere antagelse.
Vi konkluderer med $Q \Rightarrow P$.
Vi konkluderer med $P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$.

Vi introduserer første slutningsregel. Den regnes som fundamental i logikk og kalles gjerne *modus ponens*.

Slutningsregel 1. Om vi har P og $P \Rightarrow Q$, kan vi konkludere med Q.

Vi beviser nok en tautologi for å øve oss på bruken av bevisteknikkene og slutningsreglene.

Eksempel 1.3. La P og Q være utsagn. Bevis

$$P \Rightarrow ((P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q).$$

Løsning:

Vi beviser $P \Rightarrow ((P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q)$:
Anta P. (*Bevisteknikk 1. Målet er nå* $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q$)
Anta $P \Rightarrow Q$. (*Bevisteknikk 1 igjen. Målet er nå* Q)
Vi har P og $P \Rightarrow Q$, så vi får Q. (*Slutningsregel 1)*
Vi konkluderer med $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q$.
Vi konkluderer med $P \Rightarrow ((P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q)$.

Bevis med konjunksjon

Bevisteknikk 2. For å bevise $P \wedge Q$, bevis P og Q hver for seg.

Det ser typisk slik ut:

Bevis for $P \wedge Q$:
Bevis 1:
Vi viser P:
(*Bevis for* P)
Bevis 2:
Vi viser Q:
(*Bevis for* Q)
Vi konkluderer med $P \wedge Q$.

Slutningsregel 2. Følgende gjelder:

(i) Om vi har gitt P og vi har gitt Q, kan vi konkludere med $P \wedge Q$.
(ii) Om vi har gitt $P \wedge Q$, kan vi konkludere med P. Om vi har gitt $P \wedge Q$, kan vi også konkludere med Q.

Følgende eksempel illustrerer bruk av Bevisteknikk 2 og Slutningsregel 2.

Eksempel 1.4. La P, Q og R være utsagn. Anta at $P \Rightarrow (Q \wedge R)$ holder. Vis at $(P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow R)$ holder.

Løsning:

Anta at $P \Rightarrow (Q \wedge R)$ holder.
Vi beviser $(P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow R)$:
Bevis 1: (*Bevisteknikk 2*)

Vi viser først $P \Rightarrow Q$:

Anta P. (*Bevisteknikk 1. Målet er nå Q*)
Vi har P og $P \Rightarrow (Q \wedge R)$, som gir $Q \wedge R$. (*Slutningsregel 1*)
Spesielt har vi Q. (*Slutningsregel 2*)

Vi konkluderer med $P \Rightarrow Q$.

Bevis 2:

Deretter viser vi $P \Rightarrow R$:

Anta P. (*Bevisteknikk 1. Målet er nå R*)
Vi har P og $P \Rightarrow (Q \wedge R)$, som gir $Q \wedge R$. (*Slutningsregel 1*)
Spesielt har vi R. (*Slutningsregel 2*)

Vi konkluderer med $P \Rightarrow R$.

Vi konkluderer med $(P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow R)$.

Bevis med disjunksjon

Bevisteknikk 3. Om du har $P \vee Q$ og skal bevise R, del opp i to tilfeller: ett der du har P og skal bevise R, og ett der du har Q og skal bevise R.

Det ser typisk slik ut:

Vi vet at $P \vee Q$ holder.
Bevis for R:
Tilfelle 1:

Anta P.
(*Bevis for R*)

Tilfelle 2:

Anta Q.
(*Bevis for R)*

I hvert tilfelle stemmer R, så vi konkluderer med R.

Slutningsregel 3. Om du har P eller har Q, kan du slutte $P \vee Q$.

Eksempel 1.5. La P, Q og R være påstander slik at $P \wedge (Q \vee R)$. Bevis at $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$.

Løsning:

Vi vet at $P \wedge (Q \vee R)$.
Vi beviser $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
Fra $P \wedge (Q \vee R)$ slutter vi P. (*Slutningsregel 2*)
Fra $P \wedge (Q \vee R)$ slutter vi $Q \vee R$. (*Slutningsregel 2*)
Tilfelle 1: (*Bevisteknikk 3 på $Q \vee R$*)
    Anta Q.
    Siden vi har P og Q, slutter vi $P \wedge Q$. (*Slutningsregel 2*)
    Spesielt har vi da $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$. (*Slutningsregel 3*)
Tilfelle 2:
    Anta R.
    Siden vi har P og R, slutter vi $P \wedge R$. (*Slutningsregel 2*)
    Spesielt har vi da $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$. (*Slutningsregel 3*)
I hvert tilfelle stemmer $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$, så vi konkluderer med $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$.

Bevis med negasjon

Den vanligste måten å vise $\neg P$ på er å anta P og utlede en usannhet, altså $\bot$. Dette er typisk noe som åpenbart er usant, ofte $Q \wedge \neg Q$ for et eller annet utsagn Q. En slik usannhet kalles ofte en selvmotsigelse, eller noe "absurd". Denne bevisteknikken kan begrunnes med at $\neg P$ og $P \Rightarrow \bot$ er logisk ekvivalente. Bevisteknikk 4 under kan dermed ses på som et spesialtilfelle av Bevisteknikk 1.

Bevisteknikk 4. For å bevise $\neg P$, anta P og utled en usannhet.

Det ser typisk slik ut:

Bevis for $\neg P$:
    Anta P.
    (*Bevis for $\bot$*)
Vi konkluderer med $\neg P$.

Om vi bruker at P og $\neg(\neg P)$ er logisk ekvivalente, ser vi at vi kan også bruke teknikken over på følgende måte: For å vise P, anta $\neg P$ og utled en usannhet. Dette kalles ofte for *selvmotsigelsesbevis*. Vi kan gjerne kalle Bevisteknikk 4 for selvmotsigelsesbevis også, men logikere liker å skille de to.

Eksempel 1.6. Anta at $\neg P \wedge \neg Q$ holder. Bevis at $\neg(P \vee Q)$.

Løsning:

Vi antar $\neg P \wedge \neg Q$.
Vi skal nå vise $\neg(P \vee Q)$.
    For å oppnå en selvmotsigelse, anta $P \vee Q$. (*Bevisteknikk 3. Målet er nå $\bot$*)
        Tilfelle 1: P holder. (*Bevisteknikk 4*)
        Vi har $\neg P \wedge \neg Q$, som spesielt gir $\neg P$. (*Slutningsregel 2*)
        Fra P og $\neg P$ konkluderer vi med $P \wedge \neg P$, som er en selvmotsigelse. (*Slutningsregel 2*)
        Tilfelle 2: Q holder.
        Vi har $\neg P \wedge \neg Q$, som spesielt gir $\neg Q$. (*Slutningsregel 2*)
        Fra Q og $\neg Q$ konkluderer vi med $Q \wedge \neg Q$, som er en selvmotsigelse.
    I hvert tilfelle oppnådde vi en selvmotsigelse.
Vi konkluderer med $\neg(P \vee Q)$.

Vi har sett tidligere at $P \Rightarrow Q$ og $\neg Q \Rightarrow \neg P$ er logisk ekvivalente. For å bevise implikasjonen $P \Rightarrow Q$, kan vi med andre ord bevise $\neg Q \Rightarrow \neg P$ i stedet. Et slikt bevis kalles et *kontrapositivt* bevis.

Bevisteknikk 5. For å bevise $P \Rightarrow Q$, anta $\neg Q$ og utled $\neg P$.

I seksjonen for bevis med disjunksjon ga vi ikke en konkret teknikk for å bevise $P \vee Q$. Vi kan nå formulere en slik teknikk, som er basert på tautologien $(P \vee Q) \Leftrightarrow (\neg P \Rightarrow Q)$. Denne teknikken er ikke alltid naturlig å bruke, man må se litt an situasjonen.

Bevisteknikk 6. For å bevise $P \vee Q$, anta $\neg P$ og utled Q.

Eksempel 1.7. Anta at $\neg(P \wedge Q)$ holder. Bevis at $\neg P \vee \neg Q$ holder.

Vi antar $\neg(P \wedge Q)$.
Vi beviser $\neg P \vee \neg Q$:

Anta $\neg(\neg P)$. (*Bevisteknikk 6. Målet er nå* $\neg Q$)
Vi har P og $\neg(\neg P) \Rightarrow P$, så vi får P. (*Slutningsregel 1*)

Anta Q. (*Bevisteknikk 4. Målet er nå* $\perp$)
Vi har P og Q, så vi kan slutte $P \wedge Q$. (*Slutningsregel 2*)
Fra $P \wedge Q$ og $\neg(P \wedge Q)$ slutter vi $(P \wedge Q) \wedge \neg(P \wedge Q)$, en selvmotsigelse. (*Sl.regel 2*)

Vi konkluderer med $\neg Q$.

Vi konkluderer med $\neg P \vee \neg Q$.

Bevis med ekvivalens

Bevis for ekvivalens $P \Leftrightarrow Q$ er rett fram. Vi bruker simpelthen at $P \Leftrightarrow Q$ er logisk ekvivalent med $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$. Følgende bevisteknikk kan dermed utledes fra Bevisteknikk 2:

Bevisteknikk 7. For å bevise $P \Leftrightarrow Q$, bevis $P \Rightarrow Q$ og $Q \Rightarrow P$ hver for seg.

Det ser typisk slik ut:

Bevis for $P \Leftrightarrow Q$:
Bevis 1:

Vi viser $P \Rightarrow Q$:
(*Bevis for* $P \Rightarrow Q$)

Bevis 2:

Vi viser $Q \Rightarrow P$:
(*Bevis for* $Q \Rightarrow P$)

Vi konkluderer med $P \Leftrightarrow Q$.

Merknad. Noen av bevisteknikkene og slutningsreglene kan kanskje oppleves litt pedantiske eller slaviske. Poenget her har vært å vise at et bevis kan reduseres til noen minste byggestener. Målet er at bruk av disse teknikkene skal gå mye mer på automatikk etter hvert. Likevel tror jeg det kan være instruktivt å se hvordan det ville sett ut dersom man begrunner hvert minste lille steg, slik vi har gjort her.

1.3 Predikatlogikk

Vi skal nå ta steget videre fra kun utsagn, og begynne å snakke om *objekter*. Vi bruker variabler som x, y, z, osv., til å betegne dem. De skal tilhøre et eller annet *univers* U. Hva dette universet

er, kommer an på konteksten (men fra kapittel 2 av skal vi konsentrere oss om universet av mengder).

La oss se for oss at vi jobber med heltall som univers, altså $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$. Om vi lar x være en variabel, kan vi danne uttrykket

$$x + 1 = 2.$$

Dette er ikke et utsagn, da det ikke har en sannhetsverdi før vi har satt inn en konkret verdi for x. Vi kaller slike uttrykk for *predikater* og bruker symboler som $P(x)$, $Q(x)$, osv. for dem (i boka kalles de egenskaper). Om vi lar $P(x)$ stå for predikatet $x + 1 = 2$, så vil $P(1)$ betegne utsagnet $1 + 1 = 2$ (som er sant), mens $P(2)$ vil betegne utsagnet $2 + 1 = 2$ (som er usant).

Vi kan også ha predikater av flere variable. For eksempel kunne vi betraktet

$$R(x, y) \ : \quad x^2 + y \geq 0.$$

Dette er et predikat av to variable. Her får vi altså et utsagn først nå vi setter inn konkrete verdier for både x og y. For eksempel er $R(-2, -1)$ sant mens $R(1, -4)$ er usant.

Mer generelt kan vi ha predikater $P(x_1, \ldots, x_n)$ av n variable.

Kvantorer

Dersom $P(x)$ er et predikat, så kan vi danne to viktige utsagn:

- $\forall x P(x)$ — "for alle x gjelder $P(x)$",
- $\exists x P(x)$ — "det fins en x slik at $P(x)$ gjelder".

$\forall$ kalles den universelle kvantoren, mens $\exists$ kalles den eksistensielle kvantoren.

For predikatet $P(x) : \ x + 1 = 2$ betraktet over, vil utsagnet $\forall x P(x)$ være *usant*: Det er ikke slik at $P(x)$ stemmer uansett x, for eksempel er $P(2)$ usant. Derimot er utsagnet $\exists x P(x)$ *sant*, fordi det fins en x, nemlig $x = 1$, som gjør at $P(x)$ stemmer.

Kvantorene interagerer med negasjon på følgende grunnleggende måte:

$$\begin{aligned} \neg(\forall x P(x)) &\quad \Leftrightarrow \quad \exists x(\neg P(x)), \\ \neg(\exists x P(x)) &\quad \Leftrightarrow \quad \forall x(\neg P(x)). \end{aligned}$$

Det blir mer spennende når vi bruker kvantorer på predikater av flere variable. Gitt et predikat $P(x, y)$ av to variable x og y vil for eksempel $\forall x P(x, y)$ være et *nytt* predikat av én variabel y. Først når vi bruker to kvantorer, for eksempel $\exists y \forall x P(x, y)$, får vi et utsagn.

Eksempel 1.8. Vi betrakter predikatet

$$R(x, y) \ : \quad x^2 + y \geq 0$$

hvor universet er alle heltall. Ved å bruke universell og eksistensiell kvantor kan vi nå lage 8 apriori ulike utsagn:

1. $\forall x \, \forall y \, R(x, y)$
2. $\forall y \, \forall x \, R(x, y)$
3. $\forall x \, \exists y \, R(x, y)$
4. $\forall y \, \exists x \, R(x, y)$
5. $\exists x \, \forall y \, R(x, y)$
6. $\exists y \, \forall x \, R(x, y)$
7. $\exists x \, \exists y \, R(x, y)$
8. $\exists y \, \exists x \, R(x, y)$

Vi merker oss at 1 og 2 generelt er ekvivalente, og at 7 og 8 er ekvivalente: det spiller ingen rolle hvilken rolle kvantorer av *samme sort* står i. Utover dette er resten av utsagnene generelt ikke ekvivalente.

Utsagn 1 og 2 her påstår at $x^2 + y \geq 0$ for alle verdier av x og y. Dette er usant, for vi kan jo plugge inn for eksempel $x = 0$ og $y = -1$.

Utsagn 3 sier at det for enhver x fins en y slik at $x^2 + y \geq 0$. Dette stemmer, da vi vet at $x^2 \geq 0$ alltid, så vi gitt x bare velge $y = 0$ og følgelig få $x^2 + y = x^2 \geq 0$.

Utsagn 4 sier at det for enhver y fins en x slik at $x^2 + y \geq 0$. Dette stemmer, men her må x avhenge av y. Vi kan for eksempel gitt y velge $x = y$. Vi får da at $x^2 + y = y(y + 1)$. Merk at dette alltid er ikke-negativt for all heltall y: den eneste måten det kunne blitt negativt på er om y og $y + 1$ har motsatt fortegn, men det går ikke.

Utsagn 5 sier at det finnes en x slik at uansett y så blir $x^2 + y \geq 0$. Dette går ikke: Uansett hva x måtte være, så kan vi for eksempel velge $y = -x^2 - 1$, og få $x^2 + y = -1 < 0$.

Utsagn 6 sier at det finnes en y slik at uansett hva x måtte være, så bli $x^2 + y \geq 0$. Dette finnes! Ta nemlig $y = 0$. Da er $x^2 + y = x^2 \geq 0$. Dette så vi egentlig allerede i utsagn 5: Merk at $\exists x \forall y R(x, y)$ generelt alltid impliserer $\forall y \exists x R(x, y)$!

Videre stemmer utsagn 7 og 8, for her ber vi bare om det finnes et par av verdier x og y som gjør at $x^2 + y \geq 0$. Da kan vi for eksempel velge $x = y = 0$.

Likhet

Uansett hvilket univers vi jobber med så antar vi at det finnes et begrep om *likhet*, altså at for gitte objekter x og x kan vi danne utsagnet $x = y$ (som da er sant eller usant). Vi tar for gitt at likhet tilfredsstiller følgende egenskaper:

(i) $\forall x(x = x)$.
(ii) $\forall x \forall y(x = y \Rightarrow y = x)$.
(iii) $\forall x \forall y \forall z\big((x = y) \wedge (y = z) \Rightarrow y = z\big)$.

I tillegg, dersom $P(x)$ er et predikat, så har vi at

- $\forall x \forall y \Big((x = y) \quad \Rightarrow \quad \big(P(x) \Rightarrow P(y)\big)\Big)$.

Mer uformelt, dersom x og y er like, så kan vi fritt erstatte forekomster av x med forekomster av y i alle mulige uttrykk.

Unik eksistens

Kvantoren $\exists$ brukes for å uttrykke at noe eksisterer med en gitt egenskap. Vi innfører også $\exists!$, som betegner at det eksisterer et unikt objekt med en gitt egenskap. Vi kan definere bruk av kvantoren som følger: gitt et predikat $P(x)$, så definerer vi

$$\exists! x P(x) \quad \Leftrightarrow \quad \big(\exists x P(x)\big) \ \wedge \ \forall x \forall y \Big(P(x) \wedge P(y) \implies x = y\Big).$$

1.4 Bevis i predikatlogikk

Vi har følgende grunnleggende måte å bevise et utsagn på formen $\forall x P(x)$.

Bevis med universell kvantor

Bevisteknikk 8. For å bevise $\forall x P(x)$, la a være vilkårlig og utled $P(a)$.

Dette ser typisk slik ut:

Bevis for $\forall x P(x)$:
  La a være vilkårlig.
  (*Bevis for* $P(a)$).
Vi konkluderer med $\forall x P(x)$.

Slutningsregel 4. Om du har gitt et objekt a og vet at $\forall x P(x)$, kan du slutte $P(a)$.

Igjen illustrerer vi bruk av teknikkene ved å bevise følgende tautologi:

Eksempel 1.9. La $P(x)$ og $Q(x)$ være predikater. Bevis følgende:

$$\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \quad \Rightarrow \quad (\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x)).$$

Løsning:

Vi beviser $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \quad \Rightarrow \quad (\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x))$:
  Anta $\forall x(P(x) \wedge Q(x))$. (*Bevisteknikk 1. Målet er nå* $(\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x))$)
  Bevis 1: (*Bevisteknikk 2*)
    Vi skal bevise $\forall x P(x)$.
      La a være vilkårlig. (*Bevisteknikk 8. Målet er nå* $P(a)$)
      Vi har at $P(a) \wedge Q(a)$. (*Slutningsregel 5)*
      Spesielt har vi $P(a)$. (*Slutningsregel 2)*
    Vi konkluderer med $\forall x P(x)$.
  Bevis 2:
    Vi beviser nå $\forall x Q(x)$.
      La a være vilkårlig. (*Bevisteknikk 8. Målet er nå* $Q(a)$)
      Vi har at $P(a) \wedge Q(a)$. (*Slutningsregel 5)*
      Spesielt har vi $Q(a)$. (*Slutningsregel 2)*
    Vi konkluderer med $\forall x Q(x)$.
  Vi konkluderer med $(\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x))$.
Vi konkluderer med $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \quad \Rightarrow \quad (\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x))$.

Bevis med eksistensiell kvantor

Slutningsregel 5. Følgende gjelder:

(i) Om du har gitt $\exists x P(x)$, kan du innføre et objekt a med egenskapen $P(a)$.
(ii) Om du har et objekt a med egenskapen $P(a)$, kan du konkludere med at $\exists x P(x)$.

Eksempel 1.10. La $P(x)$ være et predikat og la Q være et utsagn. Bevis

$$\Big(\exists x\big(P(x) \Rightarrow Q\big)\Big) \Rightarrow \Big(\big(\forall x P(x)\big) \Rightarrow Q\Big).$$

Løsning:

Vi skal bevise $\Big(\exists x\big(P(x) \Rightarrow Q\big)\Big) \Rightarrow \Big(\big(\forall x P(x)\big) \Rightarrow Q\Big)$.

Anta $\exists x(P(x) \Rightarrow Q)$. (*Bevisteknikk 1. Målet er nå* $(\forall x P(x)) \Rightarrow Q$.)

Anta $\forall x P(x)$. (*Bevisteknikk 1. Målet er nå* Q.)

Fra $\exists x(P(x) \Rightarrow Q)$ innfører vi a slik at $P(a) \Rightarrow Q$. (*Slutningsregel 5*)

Fra $\forall x P(x)$ deduserer vi $P(a)$. (*Slutningsregel 4*)

Fra $P(a)$ og $P(a) \Rightarrow Q$ konkluderer vi Q. (*Bevisteknikk 8*)

Vi konkluderer med $(\forall x P(x)) \Rightarrow Q$.

Vi konkluderer med $\Big(\exists x\big(P(x) \Rightarrow Q\big)\Big) \Rightarrow \Big(\big(\forall x P(x)\big) \Rightarrow Q\Big)$.

Den siste bevisteknikken gir en måte å bevise eksistens på ved å anta det motsatte og prøve å oppnå en selvmotsigelse. Dette er ikke en teknikk som alltid er naturlig å bruke, men den kan være veldig kraftig i riktig situasjon.

Bevisteknikk 9. For å bevise $\exists x P(x)$, anta $\forall x \neg P(x)$ og oppnå en selvmotsigelse.

Kapittel 2

Mengder og funksjoner

I første kapittel bygget vi først opp utsagnslogikk, og deretter predikatlogikk hvor vi betraktet objekter som tilhørte et eller annet univers. Dette universet kunne for eksempel være alle heltall. I dette kapittelet skal vi bygge opp et helt spesielt univers, nemlig universet av såkalte mengder. Vi skal sette opp utgangspunktet for den vanlige matematikken inne i dette universet.

Vi antar altså at vi har et univers hvor vi skal bruke bokstaver som x, y, z, men også A, B og C, for å betegne objektene. Disse objektene kaller vi altså for *mengder*. I tillegg antar vi et helt grunnleggende predikat av to variable: $x \in y$. Dette er da et utsagn for hvert konkrete par av mengder x og y. Vi uttaler $x \in y$ som at x *er et element av* y, eller at y *inneholder* x. Vi innfører også forkortelsen

$$x \notin y \quad \iff \quad \neg(x \in y).$$

Merk at *alle* matematiske objekter kommer til å være mengder når vi danner et fundament på denne måten: tall, tupler, funksjoner, relasjoner, også videre. Vi kommer imidlertid ikke til å tenke på alle disse objektene som mengder etter at vi har enkodet dem som mengder og utledet deres grunnleggende egenskaper.

Vi skal nå gradvis begynne å innføre aksiomer for hvordan mengder og element-predikatet oppfører seg.

2.1 De første aksiomene

Likhet og inklusjon

Siden vi antar at alle universer av objekter er utstyrt med et begrep om likhet, har vi også et slikt begrep for mengder. Gitt to mengder A og B kan vi altså spørre om $A = B$. En grunnleggende egenskap vi antar at likhet har, er at to like mengder fritt kan byttes ut med hverandre i diverse utsagn. Dette innebærer spesielt at vi har

$$\forall A \forall B \Big(A = B \quad \Rightarrow \quad \forall x (x \in A \Leftrightarrow x \in B) \Big).$$

Sagt med ord: dersom to mengder er like, inneholder de nøyaktig de samme elementene.

Det første aksiomet vårt sier det motsatte: altså at dersom to mengder inneholder nøyaktig de samme elementene, så er de like.

Aksiom 2.1. Vi har at

$$\forall A \forall B \Big(\forall x (x \in A \Leftrightarrow x \in B) \quad \Rightarrow \quad A = B \Big).$$

Vi innfører nå et av grunnbegrepene for mengder.

Definisjon 2.1. La A og B være mengder. Vi sier at A er en *delmengde* av B og skriver $A \subseteq B$ dersom følgende gjelder:

$$\forall x(x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Lemma 2.1. *Vi har at*

$$\forall A \forall B \forall x \Big((x \in A \ \wedge \ A \subseteq B) \implies x \in B\Big).$$

Bevis. Vi skriver beviset systematisk som vi gjorde i Kapittel 1 og referer eksplisitt til bevisteknikker og slutningsregler.

Vi skal vise at $\forall A \forall B \forall x \Big((x \in A \ \wedge \ A \subseteq B) \implies x \in B\Big)$:

La A, B og x være vilkårlige mengder. (*Bevisteknikk 8*)

Anta $x \in A \ \wedge \ A \subseteq B$. (*Bevisteknikk 1*)
$x \in A \ \wedge \ A \subseteq B$ gir spesielt $x \in A$. (*Slutningsregel 2*)
$x \in A \ \wedge \ A \subseteq B$ gir spesielt $A \subseteq B$. (*Slutningsregel 2*)
Per definisjon av $A \subseteq B$ har vi at $\forall y(y \in A \Rightarrow y \in B)$.
Vi får da at $x \in A \Rightarrow x \in B$. (*Slutningsregel 4*)
Siden vi nå har $x \in A$ og $x \in A \Rightarrow x \in B$, konkluderer vi med at $x \in B$. (*Slutningsregel 1*)

Vi konkluderer med at $(x \in A \ \wedge \ A \subseteq B) \implies x \in B$.

Siden A, B og x var vilkårlige, konkluderer vi med at $\forall A \forall B \forall x \Big((x \in A \wedge A \subseteq B) \implies x \in B\Big)$.

□

Beviset for følgende proposisjon lar vi være en oppgave.

Proposisjon 2.2. *Vi har at*

$$\begin{aligned} \forall A \quad & A \subseteq A, \\ \forall A \forall B \forall C \quad & \Big(A \subseteq B \ \wedge \ B \subseteq C \implies A \subseteq C\Big), \\ \forall A \forall B \quad & \Big(A \subseteq B \ \wedge \ B \subseteq A \implies A = B\Big). \end{aligned}$$

Tomme mengder

Definisjon 2.2. Vi sier at en mengde A er *tom* dersom den ikke inneholder noen elementer. Altså

$$\forall x(x \notin A).$$

Proposisjon 2.3. *La A og B være tomme mengder. Da er $A = B$.*

Bevis. Vi viser at $\forall x(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$:

La x være vilkårlig. Fra definisjonen av en tom mengde vet vi at $x \notin A$ og $x \notin B$. Ergo er utsagnene $x \in A$ og $x \in B$ usanne, så ekvivalensen $x \in A \Leftrightarrow x \in B$ er sann.

Siden x var vilkårlig, har vi nå vist at $\forall x(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$. Fra Aksiom 2.1 kan vi konkludere med at $A = B$. □

Proposisjon 2.3 viser at det kan finnes høyst én tom mengde. Men vi vet ikke ennå at det fins en tom mengde i det hele tatt. Faktisk kunne universet vårt av mengder vært helt tomt så langt. Men dette vil neste aksiom endre.

Aksiom 2.2. Det fins en tom mengde. Altså

$$\exists A \forall x (x \notin A).$$

Notasjon 2.1. Ved Aksiom 2.2 og Proposisjon 2.3 vet vi nå at det finnes en *unik* tom mengde. Vi betegner den med $\emptyset$. Denne mengden karakteriseres altså ved at

$$\forall x (x \notin \emptyset).$$

Vi vet altså nå at universet vårt i hvert fall inneholder ett objekt, den tomme mengden. Men så langt trenger det ikke inneholder noe mer.

Mengder bestemt av predikater

La $P(x)$ være et predikat. Et legitimt spørsmål er om det eksisterer en mengde B som er karakterisert av at elementene tilfredsstiller predikatet $P(x)$. Med andre ord, fins det en mengde B slik at

$$x \in B \quad \iff \quad P(x) \ ?$$

I boka kaller man slike predikater for *mengdebyggende*, men jeg tror ikke jeg kommer til å bruke det så mye.

Lemma 2.4. *La $P(x)$ være et predikat, og anta at det fins en mengde B slik at*

$$\forall x \left(x \in B \quad \iff \quad P(x)\right).$$

Da er B entydig bestemt. Med andre ord, dersom B' er en mengde slik at

$$\forall x \left(x \in B' \quad \iff \quad P(x)\right),$$

så må $B = B'$.

Bevis. Vi antar at B og B' begge er mengder som tilfredsstiller de overnevnte egenskapene. Vi bruker nå Aksiom 2.1 til å vise at $B = B'$.

La x være vilkårlig. Dersom $x \in B$, får vi per antagelse om B at $P(x)$. Men per antagelse om B' gir dette $x \in B'$. På den andre siden, dersom $x \in B$, gir antagelsen om B' at $P(x)$, som igjen gir $x \in B$ fra antagelsen om B.

Argumentet over viser at $\forall x \left(x \in B \Leftrightarrow x \in B'\right)$. Fra Aksiom 2.1 konkluderer vi med at $B = B'$. □

Notasjon 2.2. La $P(x)$ være et predikat. Vi betegner den unike mengden fra Lemma 2.4, dersom den finnes, med

$$\{x : P(x)\}.$$

Dette leses "mengden av x slik at $P(x)$". Denne mengden karakteriseres altså entydig ved egenskapen

$$\forall y \left(y \in \{x : P(x)\} \quad \iff \quad P(y)\right).$$

Eksempel 2.1. La $P(x)$ stå for predikatet $\bot$, altså predikatet som er universelt usant uavhengig av hva x måtte være. Dette predikatet er mengdebyggende dersom det fins en mengde B slik at

$$\forall x \, (x \in B \quad \iff \quad \bot).$$

Siden $(x \in B) \Leftrightarrow \bot$ er logisk ekvivalent med $x \notin B$, ser vi at utsagnet over karakteriserer den tomme mengden. Vi konkluderer med at $P(x)$ er mengdebyggende, og at

$$\emptyset = \{x : \bot\}.$$

Eksempel 2.2. La $P(x)$ stå for predikatet $x \notin x$. La oss anta at det er mengdebyggende, altså at det fins en mengde B som karakteriseres av

$$\forall x \, (x \in B \quad \iff \quad x \notin x).$$

Nå har det seg slik at enten så er $B \in B$ eller så er $B \notin B$. Dersom $B \in B$ gir den karakteriserende egenskapen til B at $B \notin B$, som er en selvmotsigelse. På den andre siden, dersom $B \notin B$, betyr det igjen fra den karakteriserende egenskapen til B at $B \in B$, som igjen er en selvmotsigelse. I hvert tilfelle får vi en selvmotsigelse.

Konklusjonen vår er dermed at mengden B ikke fins, altså at predikatet $x \notin x$ ikke er mengdebyggende. Selvmotsigelsen over kalles *Russells paradoks*.