26. oktober 2026

MAT1140

Obligatorisk oppgave 1 av 2

Innleveringsfrist

Torsdag 8. oktober 2026, klokken 14:30 i Canvas (canvas.uio.no).

Instruksjoner

Merk at man har **ett forsøk** på å få oppgaven godkjent. Dette betyr at det ikke lenger gis andregangsforsøk.

Du velger selv om du skriver besvarelsen for hånd og scanner besvarelsen eller om du skriver løsningen direkte inn på datamaskin (for eksempel ved bruk av LaTeX). Besvarelsen skal leveres som én PDF-fil. Scannede ark må være godt lesbare. Besvarelsen skal inneholde navn, emne og oblignummer.

Det forventes at man har en klar og ryddig besvarelse med tydelige begrunnelser. Husk å inkludere alle relevante plott og figurer. Samarbeid og alle slags hjelpemidler er tillatt, men den innleverte besvarelsen skal være skrevet av deg og reflektere din forståelse av stoffet.

Søknad om utsettelse av innleveringsfrist

Hvis du blir syk eller av andre grunner trenger å søke om utsettelse av innleveringsfristen, må du ta kontakt med studieadministrasjonen ved Matematisk institutt (e-post: studieinfo@math.uio.no) senest samme dag som innleveringsfristen.

For å få adgang til avsluttende eksamen i dette emnet, må man bestå alle obligatoriske oppgaver i ett og samme semester.

For fullstendige retningslinjer for innlevering av obligatoriske oppgaver, se her:

www.uio.no/studier/admin/obligatoriske-aktiviteter/mn-math-oblig.html

LYKKE TIL!

Kravet for å få godkjent obligen er at den er levert inn (i Canvas).

Oppgave 1. Anta at P, Q og R er utsagn slik at utsagnet $(P \vee Q) \Rightarrow R$ er sant. Hvilke av følgende utsagn må være sanne? Begrunn svaret ditt.

a) $P \Rightarrow (Q \wedge R)$.

b) $\neg R \Rightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$.

Oppgave 2. La A være en mengde. La $Q(\mathcal{B})$ betegne predikatet

$$Q(\mathcal{B}) \ : \quad \bigcup \mathcal{B} = A.$$

Vis at $Q(\mathcal{B})$ er mengdebyggende, altså at det fins en mengde C slik at

$$\forall \mathcal{B} \left(\mathcal{B} \in C \quad \iff \quad Q(\mathcal{B}) \right).$$

Oppgave 3. La $A = \{0, 1, 2\}$. Definer en funksjon $f \colon A \to A$ ved

$$\begin{aligned} f(0) &= 1, \\ f(1) &= 0, \\ f(2) &= 1. \end{aligned}$$

a) Avgjør om f injektiv og/eller surjektiv.

b) Finn et element $x \in A$ slik at $f|_{A_1} \colon A_1 \to A_2$ er en bijeksjon, der $A_1 = A \setminus \{x\}$ og $A_2 = f[A_1]$.

Oppgave 4. La A og B være mengder. Definer en funksjon $\Phi \colon \mathcal{P}(B)^A \to \mathcal{P}(A \times B)$ ved

$$\Phi(f) = \{(x, y) \in A \times B : y \in f(x)\}, \quad f \in \mathcal{P}(B)^A.$$

Vis at Φ er en bijeksjon.

Oppgave 5. I emnet har vi definert addisjon av naturlige tall rekursivt ved følgende formler for alle $a, b \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} a + 0 &= a, \\ a + s(b) &= s(a + b). \end{aligned}$$

I forelesningen viste vi at addisjon er en assosiativ binæroperasjon. I denne oppgaven skal du vise at addisjon er en kommutativ binæroperasjon med 0 som nøytralt element. Husk at $1 = s(0)$.

a) Vis at $0 + a = a$ for alle $a \in \mathbb{N}$ ved induksjon. Konkluder med at 0 er et nøytralt element for addisjon.

b) Vis at $a + 1 = s(a)$ og at $1 + a = s(a)$ for alle $a \in \mathbb{N}$ (det første beviset fungerer fint uten induksjon, mens det andre krever induksjon). Konkluder med at $a + 1 = 1 + a$ for alle $a \in \mathbb{N}$.

c) Vis ved induksjon at $a + b = b + a$ for alle $a, b \in \mathbb{N}$. (Hint: Bruk a, og assosiativitet av addisjon i kombinasjon med b.)

Løsninger:

Oppgave 1

a) Dersom P er sann, Q er usann og R er sann, så vil $P \vee Q$ være sann og $Q \wedge R$ være usann. Dermed blir $(P \vee Q) \Rightarrow R$ sann, mens $P \Rightarrow (Q \wedge R)$ blir usann. Derfor trenger ikke $P \Rightarrow (Q \wedge R)$ være sann selv om $(P \vee Q) \Rightarrow R$ er sann.

b) Implikasjonen $(P \vee Q) \Rightarrow R$ er ekvivalent med den kontrapositive implikasjonen $\neg R \Rightarrow \neg(P \vee Q)$. Bruker vi deMorgans lov får vi at $\neg(P \vee Q)$ er logisk ekvivalent med $\neg P \wedge \neg Q$. Dermed er $(P \vee Q) \Rightarrow R$ logisk ekvivalent med $\neg R \Rightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$, så sistnevnte må nødvendigvis være sann gitt at førstnevnte er sann.

Oppgave 2

La

$$C = \{\mathcal{B} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) : \bigcup \mathcal{B} = A\}.$$

Vi påstår at

$$\forall \mathcal{B} \left(\mathcal{B} \in C \quad \Longleftrightarrow \quad Q(\mathcal{B}) \right).$$

For å vise dette, la $\mathcal{B}$ være vilkårlig. Anta først at $\mathcal{B} \in C$. Da ser vi fra definisjonen av C at $\bigcup \mathcal{B} = A$, så $Q(\mathcal{B})$ stemmer. Vi har dermed vist implikasjonen $\mathcal{B} \in C \Rightarrow Q(\mathcal{B})$.

Anta så at $Q(\mathcal{B})$ stemmer. Vi har da at $\bigcup \mathcal{B} = A$. La $B \in \mathcal{B}$ være vilkårlig. Da gir $\bigcup \mathcal{B} = A$ at $B \subseteq A$, altså $B \in \mathcal{P}(A)$. Dette viser at $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(A)$, altså $\mathcal{B} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$. Vi har dermed vist at $\mathcal{B} \in C$, og kan konkludere med at implikasjonen $Q(\mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{B} \in C$ stemmer.

Siden $\mathcal{B} \in C \Leftrightarrow Q(\mathcal{B})$ stemmer for alle $\mathcal{B}$, konkluderer vi med at $Q(\mathcal{B})$ er mengdebyggende.

Oppgave 3

a) Siden $f(0) = 1 = f(2)$, er f ikke injektiv. Vi ser også at det ikke fins noen $x \in A$ slik at $f(x) = 2$, så f er ikke surjektiv.

b) La $x = 2$. Da er $A_1 = A \setminus \{x\} = \{0, 1\}$ og $f[A_1] = \{f(0), f(1)\} = \{0, 1\}$. Videre er $f|_{A_1} \colon \{0, 1\} \to \{0, 1\}$ gitt ved $f(0) = 1$ og $f(1) = 0$, så denne funksjonen er bijektiv.

Oppgave 4

Vi viser først at Φ er injektiv. La $f, g \in \mathcal{P}(B)^A$ og anta at $\Phi(f) = \Phi(g)$. For å vise at $f = g$, lar vi $x \in A$ være vilkårlig. Vi ønsker nå å vise at $f(x) = g(x)$. Siden $f(x)$ og $g(x)$ er delmengder av B, lar vi $y \in B$. Vi ønsker nå å vise at $y \in f(x) \Leftrightarrow y \in g(x)$.

Anta først at $y \in f(x)$. Per definisjon av $\Phi(f)$ får vi da at $(x, y) \in \Phi(f)$. Siden $\Phi(f) = \Phi(g)$, konkluderer vi med at $(x, y) \in \Phi(g)$. Men dette gir

per definisjon $y \in g(x)$. På den andre siden, dersom $y \in g(x)$, gir samme argumentasjon at $y \in f(x)$.
Vi konkluderer med at $f(x) = g(x)$. Siden $x \in A$ var vilkårlig, slutter vi at $f = g$.

Nå viser vi at Φ er surjektiv. La $R \in \mathcal{P}(A \times B)$. Definer $f \colon A \to \mathcal{P}(B)$ ved

$$f(x) = \{y \in B : (x, y) \in R\}, \quad x \in A.$$

Da er

$$\Phi(f) = \{(x, y) \in A \times B : y \in f(x)\} = \{(x, y) \in A \times B : (x, y) \in R\} = R.$$

Dette viser at Φ er surjektiv.
Siden Φ både er injektiv og surjektiv, er Φ en bijeksjon.

Oppgave 5

a) La $P(a)$ betegne utsagnet $0 + a = a$. For $a = 0$ gir definisjonen av addisjon at $0 + 0 = 0$, så $P(0)$ stemmer. La nå $a \in \mathbb{N}$ og anta at $P(a)$ stemmer, altså at $0 + a = a$. Da gir definisjonen av addisjon at

$$0 + s(a) = s(0 + a) = s(a).$$

Dermed har vi $P(s(a))$. Dette fullfører beviset for $P(a)$ for alle $a \in \mathbb{N}$ ved induksjon. Siden vi allerede ved at $a + 0 = a$ for alle $a \in \mathbb{N}$ fra definisjonen av addisjon, konkluderer vi med at 0 er et nøytralt element.
b) For å vise den første identiteten lar vi $a \in \mathbb{N}$ og bruker definisjonen av addisjon til å utlede at

$$a + 1 = a + s(0) = s(a + 0) = s(a).$$

For å vise den andre identiteten lar vi $Q(a)$ betegne predikatet $1 + a = s(a)$. Vi viser så $Q(a)$ for alle $a \in \mathbb{N}$ ved induksjon. For $a = 0$ gir igjen definisjonen av addisjon at $1 + 0 = 1 = s(0)$, så $Q(0)$ stemmer.
Anta nå at $Q(a)$ stemmer, altså at $1 + a = a$. Da gir definisjonen av addisjon at

$$1 + s(a) = s(1 + a) = s(s(a)).$$

Dette gir $Q(s(a))$.
Dette fullfører induksjonsbeviset. Vi konkluderer med at $P(a)$ stemmer for alle $a \in \mathbb{N}$.

c) La $a \in \mathbb{N}$ være gitt og la $R(b)$ betegne predikatet $a + b = b + a$. Vi viser $R(b)$ for alle $b \in \mathbb{N}$ ved induksjon. For $b = 0$ gir definisjonen av addisjon at $a + 0 = a$, mens deloppgave a) gir at $0 + a = a$. Vi konkluderer med at $a + 0 = 0 + a$, altså $R(0)$.
Anta nå at $R(b)$ holder, altså at $a + b = b + a$. Ved å bruke definisjonen av addisjon, hypotesen $a + b = b + a$, b), og assositativitet av addisjon, får vi at

$$a+s(b) = s(a+b) = s(b+a) = b+s(a) = b+(1+a) = (b+1)+a = s(b)+a.$$

Dette viser $R(s(b))$. Vi kan nå konkludere med at $R(b)$ holder for alle $b \in \mathbb{N}$ ved induksjon.