22. oktober 2026

# MAT1140

Obligatorisk oppgave 2 av 2

## Innleveringsfrist

Torsdag 5. november 2026, klokken 14:30 i Canvas (canvas.uio.no).

## Instruksjoner

Merk at man har **ett forsøk** på å få oppgaven godkjent. Dette betyr at det ikke lenger gis andregangsforsøk.

Du velger selv om du skriver besvarelsen for hånd og scanner besvarelsen eller om du skriver løsningen direkte inn på datamaskin (for eksempel ved bruk av LaTeX). Besvarelsen skal leveres som én PDF-fil. Scannede ark må være godt lesbare. Besvarelsen skal inneholde navn, emne og oblignummer.

Det forventes at man har en klar og ryddig besvarelse med tydelige begrunnelser. Husk å inkludere alle relevante plott og figurer. Samarbeid og alle slags hjelpemidler er tillatt, men den innleverte besvarelsen skal være skrevet av deg og reflektere din forståelse av stoffet.

## Søknad om utsettelse av innleveringsfrist

Hvis du blir syk eller av andre grunner trenger å søke om utsettelse av innleveringsfristen, må du ta kontakt med studieadministrasjonen ved Matematisk institutt (e-post: studieinfo@math.uio.no) senest samme dag som innleveringsfristen.

For å få adgang til avsluttende eksamen i dette emnet, må man bestå alle obligatoriske oppgaver i ett og samme semester.

## For fullstendige retningslinjer for innlevering av obligatoriske oppgaver, se her:

www.uio.no/studier/admin/obligatoriske-aktiviteter/mn-math-oblig.html

LYKKE TIL!

Kravet for å få godkjent obligen er at den er levert inn (i Canvas).

**Oppgave 1.** Avgjør hvilke utsagn om delelighet som er sanne for alle $a, b, c \in \mathbb{Z}$ og hvilke som ikke er det. Begrunn svarene dine.

a) $(a \mid b \ \wedge \ a \mid c) \implies a \mid (5b - 7c)$.

b) $ab \mid c \implies a \mid c$.

c) $a \mid (a+1)b \implies a \mid b$.

d) $a \mid c \ \wedge \ b \mid c \implies (a+b) \mid c$.

**Oppgave 2.** La $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}$. Med andre ord er $\mathcal{A}$ mengden av ikke-tomme delmengder av de naturlige tallene. Definer en relasjon $\preceq$ på $\mathcal{A}$ gitt ved

$$U \preceq V \quad \iff \quad \forall y \in V \ \exists x \in U \ (x \leq y).$$

a) Vis at $\preceq$ er refleksiv og transitiv, men ikke antisymmetrisk.

b) Vis at relasjonen $\sim$ på $\mathcal{A}$ gitt ved

$$U \sim V \quad \iff \quad (U \preceq V \ \wedge \ V \preceq U)$$

er en ekvivalensrelasjon.

c) Definer funksjonen $f \colon \mathcal{A} \to \mathbb{N}$ ved

$$f(U) = \min U, \quad U \in \mathcal{A}.$$

Vis at $f$ bevarer $\sim$, altså at dersom $U, V \in \mathcal{A}$ tilfredsstiller $U \sim V$, så må $f(U) = f(V)$. Vis også at den induserte funksjonen $\overline{f} \colon \mathcal{A}/\!\sim \to \mathbb{N}$ gitt ved

$$\overline{f}([U]) = f(U), \quad U \in \mathcal{A},$$

er en bijeksjon.

**Oppgave 3.** I denne oppgaven betrakter vi mengden $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ av følger av heltall, altså følger $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der $u_n \in \mathbb{Z}$ for hver $n \in \mathbb{N}$. Gitt to følger $u, v \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$, så definerer vi summen og produktet deres ved

$$(u+v)_n = u_n + v_n, \quad (u \cdot v)_n = u_n \cdot v_n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Merk at her betegner $u_n + v_n$ og $u_n \cdot v_n$ vanlig addisjon og multiplikasjon av heltall.

a) Vis at binæroperasjonen $+$ på $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ er kommutativ, og at den konstante følgen $\mathbf{0}$ gitt ved $\mathbf{0}_n = 0$ for alle $n \in \mathbb{N}$ er et nøytralt element.

Videre i oppgaven kan du ta det for gitt at $(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, +, \cdot, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ er en ring, der $\mathbf{1}$ betegner følgen konstant lik 1.

b) Vis at $(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, +, \cdot, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ ikke er et integritetsområde, altså at $uv = \mathbf{0}$ ikke alltid impliserer at $u = \mathbf{0}$ eller $v = \mathbf{0}$.

c) Beskriv de invertible elementene i denne ringen, altså de elementene $u \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ slik at det fins en $v \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ med $uv = vu = \mathbf{1}$.