

MAT1140 H26 oppgaver uke 35

Oppgave 1

Avgjør hvilke av de følgende sammensatte utsagnene som er tautologier ved å lage sannhetstabeller.

1. $P \Rightarrow (Q \Rightarrow (P \wedge Q))$.
2. $((P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow \neg Q)) \Rightarrow \neg P$.
3. $(P \vee Q) \implies (Q \vee R)$.

Oppgave 2

La P , Q og R være utsagn. Er utsagnene $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R$ og $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$ logisk ekvivalente?

Oppgave 3

Bruk bevistechnikker og slutningsregler (prinsippene i seksjon 1.4 i boka) til å skrive bevis for følgende tautologier:

1. $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R))$.
2. $(P \Rightarrow (Q \wedge R)) \Rightarrow ((P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow R))$.
3. $((P \vee Q) \wedge \neg P) \Rightarrow Q$.
4. $\neg(P \wedge Q) \Rightarrow (\neg P \vee \neg Q)$.

Løsning oppgave 1

Sannhetstabellene ser slik ut:

P	Q	$P \wedge Q$	$Q \Rightarrow (P \wedge Q)$	$P \Rightarrow (Q \Rightarrow (P \wedge Q))$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$P \Rightarrow \neg Q$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow \neg Q)$	$\neg P$	$((P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow \neg Q)) \Rightarrow \neg P$
$\top$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$

P	Q	R	$P \vee Q$	$Q \vee R$	$(P \vee Q) \Rightarrow (Q \vee R)$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$

Vi ser dermed at 1 og 2 er tautologier, mens 3 ikke er det.

Løsning oppgave 2

Vi vet at en implikasjon er usann kun når venstresiden er sann mens høyresiden er usann. For å få det første utsagnet til å bli usant må da $P \rightarrow Q$ være sann mens R er usann. Én måte å få det andre utsagnet til å bli sant er å la P være usann. Vi kan nå la Q være hva som helst, for eksempel usann. Da ser vi at $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R$ er usann, mens $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$ er sann. Utsagnene er altså ikke logisk ekvivalente.

Løsning oppgave 3

Vi gjør det på samme måte som i forelesningsnotatene, og refererer til bevistechnikker og slutningsregler derfra. Merk at det ikke er nødvendig å gjøre det så grundig som under, men jeg skriver det på den måten for å gjøre det mest mulig klart hva som gjøres i hvert steg.

1. Vi viser $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R))$.

Anta $P \Rightarrow Q$. (Bevisteknikk 1. Målet er nå $(Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$)

Anta $Q \Rightarrow R$. (Bevisteknikk 1. Målet er nå $P \Rightarrow R$)

Anta P . (Bevisteknikk 1. Målet er nå R)

Vi har nå P og $P \Rightarrow Q$, så vi slutter Q . (Sluttningsregel 1)

Vi har nå Q og $Q \Rightarrow R$, så vi slutter R . (Sluttningsregel 1)

Vi konkluderer med $P \Rightarrow R$.

Vi konkluderer med $(Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$.

Vi konkluderer med $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R))$.

2. Vi viser $(P \Rightarrow (Q \wedge R)) \Rightarrow ((P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow R))$.

Anta $P \Rightarrow (Q \wedge R)$. (Bevisteknikk 1. Målet er nå $(P \Rightarrow Q) \wedge (P \wedge R)$)

Bevis 1: (Bevisteknikk 2)

Vi viser $P \Rightarrow Q$.

Anta P . (Bevisteknikk 1. Målet er nå Q)

Vi har P og $P \Rightarrow (Q \wedge R)$, så vi slutter $Q \wedge R$. (Slutningsregel 1)

Siden vi har $Q \wedge R$, slutter vi spesielt Q . (Slutningsregel 2)

Vi konkluderer med at $P \Rightarrow Q$.

Bevis 2:

Vi viser $P \Rightarrow R$.

Anta P . (Bevisteknikk 1. Målet er nå R)

Vi har P og $P \Rightarrow (Q \wedge R)$, så vi slutter $Q \wedge R$. (Slutningsregel 1)

Siden vi har $Q \wedge R$, slutter vi spesielt R . (Slutningsregel 2)

Vi konkluderer med at $P \Rightarrow R$.

Vi konkluderer med at $(P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow R)$.

Vi konkluderer med at $(P \Rightarrow (Q \wedge R)) \Rightarrow ((P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow R))$.

3. Vi viser at $((P \vee Q) \wedge \neg P) \Rightarrow Q$:

Anta $(P \vee Q) \wedge \neg P$. (Bevisteknikk 1. Målet er nå Q)

Siden vi har $(P \vee Q) \wedge \neg P$, kan vi slutte $\neg P$. (Slutningsregel 2)

Siden vi har $(P \vee Q) \wedge \neg P$, kan vi slutte $P \vee Q$. (Slutningsregel 2)

Tilfelle 1: (Bevisteknikk 3)

Anta P .

Siden vi har P og $\neg P$, kan vi slutte $P \wedge \neg P$. (Slutningsregel 1)

$P \wedge \neg P$ er absurd, så dette tilfellet kan ikke inntreffe. (Slutningsregel 4)

Tilfelle 2:

Anta Q .

Dette er ønsket konklusjon.

Vi konkluderer med at Q holder.

Vi konkluderer med $((P \vee Q) \wedge \neg P) \Rightarrow Q$.