

MAT1140 H26 oppgaver uke 36

Oppgave 1

Vi betrakter universet U av alle heltall $\dots, -1, 0, 1, 2, \dots$, og følgende predikat av tre variable:

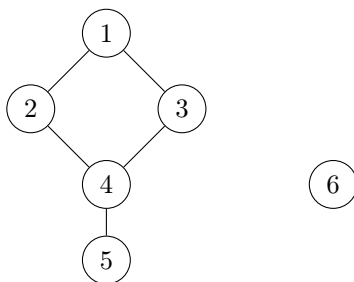
$$P(x, y, z) \Leftrightarrow x \cdot y = z.$$

Avgjør hvilke av følgende utsagn som stemmer:

1. $P(2, 3, 5)$.
2. $\forall x \exists z P(x, 2, z)$.
3. $\forall z \exists x P(x, 2, z)$.
4. $\forall z \exists x \exists y P(x, y, z)$.
5. $\exists x \forall y \forall z P(x, y, z)$.
6. $\exists x \exists z \forall y P(x, y, z)$.

Oppgave 2

Vi betrakter universet U bestående av objektene 1, 2, 3, 4, 5, og 6, som er nodene til følgende graf:



Vi definerer et predikat $R(x, y)$ av to variabler ved følgende:

$$R(x, y) \Leftrightarrow \text{det finnes en kant mellom } x \text{ og } y.$$

1. Avgjør hvilke av utsagnene $R(1, 2)$, $\neg R(2, 1)$ og $R(4, 5) \wedge R(2, 5)$ som stemmer.
2. Vi sier at en node er *isolert* dersom den ikke henger sammen med resten av grafen. La oss introdusere følgende predikat:

$$P(x) \Leftrightarrow x \text{ er isolert.}$$

Finn en måte å uttrykke $P(x)$ symbolsk på via R og de logiske konnektivene, inkludert predikater.

3. Vi innfører følgende predikat:

$$S(x, y) \Leftrightarrow (x = y) \vee R(x, y) \vee \exists z (R(x, z) \wedge R(z, y)).$$

Avgjør hvilke av utsagnene $S(1, 2)$, $S(1, 4)$ og $S(1, 5)$ som stemmer. Hvordan vil du beskrive en graf med egenskapen at $\forall x \forall y S(x, y)$?

Oppgave 3

Bruk bevistechnikker og slutningsregler både fra utsagnslogikk og predikatlogikk i bevisene for oppgavene under. Vi betrakter predikater over et vilkårlig univers U .

1. La $P(x)$ være et predikat og la Q være et utsagn. Bevis tautologien

$$\forall x(P(x) \Rightarrow Q) \quad \Leftrightarrow \quad (\exists x P(x) \Rightarrow Q).$$

2. La $P(x)$ være et predikat og la Q være et utsagn. Bevis at

$$(\forall x P(x)) \wedge Q \quad \Rightarrow \quad \forall x(P(x) \wedge Q).$$

Bevis at om universet U ikke er tomt, altså at $\exists y \top$, så gjelder også

$$\forall x(P(x) \wedge Q) \quad \Rightarrow \quad (\forall x P(x)) \wedge Q.$$

Gjelder nødvendigvis implikasjonen over om universet U er tomt?

Oppgave 1 løsning

1. Usant, da $2 \cdot 3 = 6$.
2. Sant. Gitt x , sett $z = 2x$.
3. Usant. La $z = 1$. Da fins inget heltall x slik at $x \cdot 2 = 1$.
4. Sant. Gitt z , la $x = z$ og $y = 1$. Da fås $z \cdot 1 = z$.
5. Usant. Uansett x , la $y = 0$ og $z = 1$. Da fås $x \cdot y = 0$ og $z = 1$.
6. Sant. La $x = 0$ og $z = 0$. Da gjelder $0 \cdot y = 0$ for alle y .

Oppgave 2 løsning

1. $R(1, 2)$ er sant, da det finnes en kant mellom 1 og 2. $\neg R(2, 1)$ er usant, da det fins en kant mellom 2 og 1. $R(4, 5) \wedge R(2, 5)$ er usant, da det ikke fins en kant mellom 2 og 5.
2. Vi kan uttrykke $P(x)$ som $\forall y (\neg R(x, y))$.
3. $S(1, 2)$ stemmer, siden $R(1, 2)$ stemmer, altså det fins en kant mellom 1 og 2. $S(1, 4)$ stemmer, da det fins en node z , nemlig $z = 2$, slik at det fins en kant mellom 1 og z og det fins en kant mellom z og 4. $S(1, 5)$ stemmer ikke, da $1 \neq 5$, og det ikke fins noen kant mellom 1 og 5, og det ikke fins noen node som har kanter både til 1 og til 5. Vi kan beskrive en graf med egenskapen $\forall x \forall y S(x, y)$ som at man kan komme seg fra en hvilken som helst node til en hvilken som helst annen node ved å følge maksimalt to kanter i grafen.

Oppgave 3 løsning

1.

Vi skal vise $\forall x (P(x) \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\exists x P(x) \Rightarrow Q)$.

Bevis 1:

(Bevisteknikk 7)

Vi viser først $\forall x (P(x) \Rightarrow Q) \Rightarrow (\exists x P(x) \Rightarrow Q)$.

Anta $\forall x (P(x) \Rightarrow Q)$. (Bevisteknikk 1. Målet er nå $(\exists x P(x) \Rightarrow Q)$)

Anta $\exists x P(x)$. (Bevisteknikk 1. Målet er nå Q)

Fra $\exists x P(x)$ kan vi innføre en a med egenskapen $P(a)$. (Sl.regel 5) Fra

$\forall x (P(x) \Rightarrow Q)$ kan vi konkludere med $P(a) \Rightarrow Q$. (Sl.regel 4)

$P(a)$ og $P(a) \Rightarrow Q$ gir nå Q .

Vi konkluderer med $\exists x P(x) \Rightarrow Q$.

Vi konkluderer nå med $\forall x (P(x) \Rightarrow Q) \Rightarrow (\exists x P(x) \Rightarrow Q)$.

Bevis 2:

Vi viser nå $(\exists x P(x) \Rightarrow Q) \Rightarrow \forall x (P(x) \Rightarrow Q)$.

Anta $\exists x P(x) \Rightarrow Q$. (Bevisteknikk 1. Målet er nå $\forall x (P(x) \Rightarrow Q)$)

La a være vilkårlig. (Bevisteknikk 8. Målet er nå $P(a) \Rightarrow Q$)

Anta $P(a)$. (Bevisteknikk 1. Målet er nå Q)

Siden vi har et objekt a med egenskapen $P(a)$, kan vi slutte $\exists x P(x)$. (Slutningsregel 5)

Fra $\exists xP(x)$ og $\exists xP(x) \Rightarrow Q$ får vi Q . (Sl.regel 1)

Vi konkluderer med at $P(a) \Rightarrow Q$.

Vi konkluderer med $\forall x(P(x) \Rightarrow Q)$.

Vi konkluderer med $(\exists xP(x) \Rightarrow Q) \Rightarrow \forall x(P(x) \Rightarrow Q)$.

Vi konkluderer med $\forall x(P(x) \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\exists xP(x) \Rightarrow Q)$.

2.

Vi skal vise at $(\forall xP(x)) \wedge Q \Rightarrow \forall x(P(x) \wedge Q)$.

Anta $(\forall xP(x)) \wedge Q$. (Bevisteknikk 1. Målet er nå $\forall x(P(x) \wedge Q)$)

La a være vilkårlig. (Bevisteknikk 8. Målet er nå $P(a) \wedge Q$)

Fra $(\forall xP(x)) \wedge Q$ slutter vi $\forall xP(x)$. (Slutningsregel 2)

Fra $(\forall xP(x)) \wedge Q$ slutter vi Q . (Slutningsregel 2)

Fra $\forall xP(x)$ får vi $P(a)$. (Slutningsregel 4)

Fra $P(a)$ og Q slutter vi $P(a) \wedge Q$. (Slutningsregel 2)

Vi konkluderer med $\forall x(P(x) \wedge Q)$.

Vi konkluderer med at $(\forall xP(x)) \wedge Q \Rightarrow \forall x(P(x) \wedge Q)$.

Anta nå at universet ikke er tomt, altså at $\exists y \top$.

Vi skal vise at $\forall x(P(x) \wedge Q) \Rightarrow (\forall xP(x)) \wedge Q$.

Anta $\forall x(P(x) \wedge Q)$. (Slutningsregel 1. Målet er nå $(\forall xP(x)) \wedge Q$.)

Bevis 1: (Bevisteknikk 2)

Vi skal vise $\forall xP(x)$.

La a være vilkårlig. (Bevisteknikk 8)

Fra $\forall x(P(x) \wedge Q)$ konkluderer vi med $P(a) \wedge Q$. (Slutningsregel 4)

Fra $P(a) \wedge Q$ slutter vi $P(a)$. (Slutningsregel 2)

Vi konkluderer med at $\forall xP(x)$.

Bevis 2:

Vi skal vise Q .

Fra antagelsen $\exists y \top$ kan vi introdusere et objekt b slik at $\top$.

Fra $\forall x(P(x) \wedge Q)$ utleder vi $P(b) \wedge Q$. (Slutningsregel 4)

Fra $P(b) \wedge Q$ slutter vi Q . (Slutningsregel 2)

Vi konkluderer med $(\forall xP(x)) \wedge Q$.

Vi konkluderer med $\forall x(P(x) \wedge Q) \Rightarrow (\forall xP(x)) \wedge Q$.

Dette beviset ville ikke fungert dersom universet var tomt. La Q være $\perp$ og la $P(x)$ være $\top$. Venstresiden av implikasjonen sier da $\forall x(\top \wedge \perp)$, altså $\forall x\perp$, som er sant for et tomt univers. På høyresiden får vi derimot $(\forall x\top) \wedge \perp$, som er logisk ekvivalent med $\perp$.