MAT1140 H26 oppgaver uke 36

Oppgave 1

Vi betrakter universet U av alle heltall $\ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots$, og følgende predikat av tre variable:

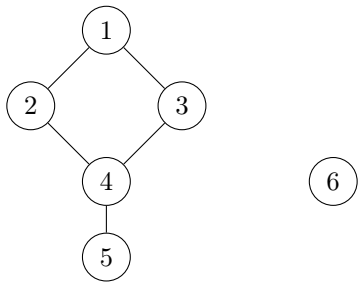
$$P(x, y, z) \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot y = z.$$

Avgjør hvilke av følgende utsagn som stemmer:

1. $P(2, 3, 5)$.
2. $\forall x \exists z P(x, 2, z)$.
3. $\forall z \exists x P(x, 2, z)$.
4. $\forall z \exists x \exists y P(x, y, z)$.
5. $\exists x \forall y \forall z P(x, y, z)$.
6. $\exists x \exists z \forall y P(x, y, z)$.

Oppgave 2

Vi betrakter universet U bestående av objektene 1, 2, 3, 4, 5, og 6, som er nodene til følgende graf:



Vi definerer et predikat $R(x, y)$ av to variabler ved følgende:

$$R(x, y) \quad \Leftrightarrow \quad \text{det finnes en kant mellom } x \text{ og } y.$$

1. Avgjør hvilke av utsagnene $R(1, 2)$, $\neg R(2, 1)$ og $R(4, 5) \wedge R(2, 5)$ som stemmer.
2. Vi sier at en node er *isolert* dersom den ikke henger sammen med resten av grafen. La oss introdusere følgende predikat:

   $$P(x) \quad \Leftrightarrow \quad x \text{ er isolert.}$$

   Finn en måte å uttrykke $P(x)$ symbolsk på via R og de logiske konnektivene, inkludert predikater.
3. Vi innfører følgende predikat:

   $$S(x, y) \quad \Leftrightarrow \quad (x = y) \vee R(x, y) \vee \exists z (R(x, z) \wedge R(z, y)).$$

   Avgjør hvilke av utsagnene $S(1, 2)$, $S(1, 4)$ og $S(1, 5)$ som stemmer. Hvordan vil du beskrive en graf med egenskapen at $\forall x \forall y S(x, y)$?

Oppgave 3

Bruk bevisteknikker og slutningsregler både fra utsagnslogikk og predikatlogikk i bevisene for oppgavene under. Vi betrakter predikater over et vilkårlig univers U.

1. La $P(x)$ være et predikat og la Q være et utsagn. Bevis tautologien

$$\forall x\big(P(x) \Rightarrow Q\big) \quad \Leftrightarrow \quad \big(\exists x P(x) \Rightarrow Q\big).$$

2. La $P(x)$ være et predikat og la Q være et utsagn. Bevis at

$$\big(\forall x P(x)\big) \wedge Q \quad \Rightarrow \quad \forall x\big(P(x) \wedge Q\big).$$

   Bevis at om universet U ikke er tomt, altså at $\exists y\, \top$, så gjelder også

$$\forall x\big(P(x) \wedge Q\big) \quad \Rightarrow \quad \big(\forall x P(x)\big) \wedge Q.$$

   Gjelder nødvendigvis implikasjonen over om universet U er tomt?