

## MAT1140 H26 oppgaver uke 37

### Oppgave 1

Bevis følgende identiteter for mengder  $A$ ,  $B$  og  $C$ :

$$\begin{aligned}A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C), \\A \times (B \cup C) &= (A \times B) \cup (A \times C), \\A \subseteq B &\Leftrightarrow A \cap B = A.\end{aligned}$$

### Oppgave 2

La  $\mathcal{A} = \{\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}\}\}$ . Beskriv  $\bigcup \mathcal{A}$  og  $\bigcap \mathcal{A}$ .

### Oppgave 3

Bevis at predikatet  $\top$  ikke er mengdebyggende, altså at utsagnet

$$\exists A \forall B (B \in A)$$

er usant. (Med andre ord: Det fins ikke en mengde som inneholder alle mengder)

### Oppgave 4

I denne oppgaven viser vi analoger av identitetene  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$  og  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$  for mengder av mengder.

La  $A$  og  $\mathcal{B}$  være mengder.

1. Vis at

$$A \cup \left( \bigcup \mathcal{B} \right) = \bigcup (\{A\} \cup \mathcal{B}).$$

2. Vis at følgende predikat i variabelen  $C$  er mengdebyggende:

$$\exists B \in \mathcal{B} (C = A \cup B).$$

La oss betegne den korresponderende mengden med  $\{A \cup B : B \in \mathcal{B}\}$ , altså

$$\{A \cup B : B \in \mathcal{B}\} = \{C : \exists B \in \mathcal{B} (C = A \cup B)\}.$$

3. Anta at  $\mathcal{B}$  er ikke-tom. Vis at

$$A \cup \left( \bigcap \mathcal{B} \right) = \bigcap \{A \cup B : B \in \mathcal{B}\}.$$

### Oppgave 5

Avjør hvilke av følgende utsagn som er sanne ved å gi et bevis eller et moteksempel i hvert tilfelle.

1.  $\forall A \forall B (\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)).$
2.  $\forall A \forall B (\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B))$
3.  $\forall A \forall B (\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B) \implies A = B).$

## Oppgave 6

Et av ZFC-aksiomene kalles regularitetsaksiomet og sier følgende:

**Aksiom** (Regularitet)

$$\forall A \left( A \neq \emptyset \Rightarrow \left( \exists B (B \in A \wedge B \cap A = \emptyset) \right) \right).$$

Vis (ved å bruke de andre aksiomene vi har introdusert så langt) at aksiomet over impliserer at ingen mengder kan inneholde seg selv, altså  $\forall A (A \notin A)$ .

## Løsning oppgave 1

I de to første oppgavene bruker vi det faktum at to mengder  $A$  og  $B$  er like dersom  $A \subseteq B$  og  $B \subseteq A$ , se Proposisjon 2.3 i forelesningsnotatene. Jeg bruker også fritt definisjonen av union og snitt, nemlig at  $x \in A \cup B$  hvis og bare hvis  $x \in A \vee x \in B$ , og  $x \in A \cap B$  hvis og bare hvis  $x \in A \wedge x \in B$ .

1 Vi viser at

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Vi viser først inklusjonen fra venstre til høyre, altså at  $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$ . La derfor  $x \in A \cup (B \cap C)$ . Dette gir to tilfeller:

- I første tilfelle er  $x \in A$ . Da er også  $x \in A \cup B$  og  $x \in A \cup C$ , så  $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ .
- I andre tilfelle er  $x \in B \cap C$ . Da har vi altså både  $x \in B$  og  $x \in C$ . Førstnevnte gir også  $x \in A \cup B$ , mens sistnevnte gir  $x \in A \cup C$ . Ergo har vi  $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ .

I begge tilfeller får vi altså  $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ . Siden  $x$  var vilkårlig, slutter vi at

$$A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Så viser vi den andre inklusjonen. La  $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ . Dette gir både  $x \in A \cup B$  og  $x \in A \cup C$ . La oss dele det første utsagnet  $x \in A \cup B$  inn i to tilfeller:

- I første tilfelle har vi  $x \in A$ . Da får vi umiddelbart at  $x \in A \cup (B \cap C)$ .
- I andre tilfelle har vi at  $x \in B$ . Da kan vi igjen dele inn i to tilfeller fra utsagnet  $x \in A \cup C$ :
  - Dersom  $x \in A$ , har vi igjen at  $x \in A \cup (B \cap C)$ .
  - Dersom  $x \in C$ , får vi  $x \in B \cap C$ , så  $x \in A \cup (B \cap C)$ .

Vi ser at uansett tilfelle så når vi konklusjonen  $x \in A \cup (B \cap C)$ . Vi konkluderer med at

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C).$$

Vi har da vist at inklusjonen går begge veier, og kan konkludere med at

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

2 Nå viser vi identiteten

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C).$$

Igen viser vi først inklusjonen fra venstre til høyre. La  $z \in A \times (B \cup C)$ . Fra definisjonen av kartesisk produkt får vi at det eksisterer  $x \in A$  og  $y \in B \cup C$  slik at  $z = (x, y)$ . Vi får da to tilfeller:

- I tilfellet der  $y \in B$ , har vi at  $z \in A \times B$ , så  $z \in (A \times B) \cup (A \times C)$ .
- I tilfellet der  $y \in C$ , har vi at  $z \in A \times C$ , så  $z \in (A \times B) \cup (A \times C)$ .

Vi ser at i begge tilfeller så er  $z \in (A \times B) \cup (A \times C)$ . Vi konkluderer med at  $A \times (B \cup C) \subseteq (A \times B) \cup (A \times C)$ .

Så viser vi inklusjonen fra høyre til venstre. La  $z \in (A \times B) \cup (A \times C)$ . Da har vi to tilfeller:

- I første tilfelle er  $z \in A \times B$ . Da fins det en  $x \in A$  og en  $y \in B$  slik at  $z = (x, y)$ . Her er også  $y \in B \cup C$ , så vi konkluderer med at  $z \in A \times (B \cup C)$ .
- I andre tilfeller er  $z \in A \times C$ . Da fins det en  $x \in A$  og en  $y \in C$  slik at  $z = (x, y)$ . Her er også  $y \in B \cup C$ , så vi konkluderer med at  $z \in A \times (B \cup C)$ .

I hvert tilfelle får vi altså at  $z \in A \times (B \cup C)$ . Siden  $z$  var vilkårlig, har vi altså vist inklusjonen

$$(A \times B) \cup (A \times C) \subseteq A \times (B \cup C).$$

Vi kan nå konkludere med at

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C).$$

**3** Vi viser nå at

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A.$$

Vi viser først implikasjonen fra venstre til høyre, altså  $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$ . Anta derfor at  $A \subseteq B$ . Vi skal nå vise at  $A \cap B = A$ .

La først  $x \in A \cap B$ . Da er spesielt  $x \in A$ . Dette viser at  $A \cap B \subseteq A$ . La så  $x \in A$ . Siden  $A \subseteq B$ , får vi at  $x \in B$  (Lemma 2.2 i forelesningsnotatene). Vi har dermed at  $x \in A \cap B$ . Dette gir  $A \subseteq A \cap B$ . Vi har vist at inklusjonen gjelder begge veier, og kan konkludere med at  $A \cap B = A$ .

Vi har nå etablert implikasjonen fra venstre til høyre, og implikasjonen fra høyre til venstre gjenstår. Anta derfor at  $A \cap B = A$ . Vi vil nå vise at  $A \subseteq B$ . For å vise dette lar vi  $x \in A$ . Siden  $A = A \cap B$ , får vi at  $x \in A \cap B$ . Dette gir spesielt  $x \in B$ . Dermed kan vi konkludere med at  $A \subseteq B$ .

Vi har nå vist at implikasjonen går begge veier, og kan konkludere med at ekvivalensen

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$$

holder.

## Løsning oppgave 2

Vi ser først på unionen. Ved inspeksjon får jeg en sterk mistanke om at

$$\bigcup \mathcal{A} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\},$$

og gir nå et bevis for dette. Først ser vi at  $\emptyset \in \{\emptyset\}$ , og at  $\{\emptyset\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ . Siden  $\{\emptyset\} \in \mathcal{A}$  og  $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in \mathcal{A}$ , gir definisjonen av union at  $\emptyset \in \bigcup \mathcal{A}$  og  $\{\emptyset\} \in \bigcup \mathcal{A}$ . Dette gir igjen  $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \subseteq \bigcup \mathcal{A}$  fra definisjonen av topunktsmengder.

På den andre siden, la  $x \in \bigcup \mathcal{A}$ . Per definisjon fins det da en  $A \in \mathcal{A}$  slik at  $x \in A$ . Vi har tre tilfeller: Dersom  $A = \{\emptyset\}$ , får vi umiddelbart  $x = \emptyset$ . Dersom  $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ , får vi  $x = \emptyset$  eller  $x = \{\emptyset\}$ . Dersom  $A = \{\{\emptyset\}\}$ , får vi  $x = \{\emptyset\}$ . I alle tre tilfellene har vi altså  $x = \emptyset$  eller  $x = \{\emptyset\}$ . Siden  $x$  var vilkårlig, kan vi dermed konkludere med at  $\bigcup \mathcal{A} \subseteq \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ . Til sammen gir de to inklusjonene at

$$\bigcup \mathcal{A} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}.$$

Nå ser vi på snittet. Her ser det ut til at

$$\bigcap \mathcal{A} = \emptyset.$$

La oss bevise dette. Vi har lyst til å vise at  $\bigcap \mathcal{A}$  er tom, så vi antar at  $x \in \bigcap \mathcal{A}$  med mål om å oppnå en selvmotsigelse. Per definisjon får vi at for alle  $A \in \mathcal{A}$  så skal  $x \in A$ . For eksempel skal både  $x \in \{\emptyset\}$  og  $x \in \{\{\emptyset\}\}$ . Førstnevnte gir  $x = \emptyset$ , mens andnevnte gir  $x = \{\emptyset\}$ . Siden  $\emptyset \neq \{\emptyset\}$ , er dette en selvmotsigelse. Vi konkluderer med at  $\bigcap \mathcal{A} = \emptyset$ .

### Løsning oppgave 3

Vi antar at predikatet  $\top$  er mengdebyggende, med mål om å oppnå en selvmodsigelse. Vi antar altså at det fins en mengde  $A$  slik at  $\forall B (B \in A)$ . Vi kan nå betrakte predikatet  $x \notin x$  og bruke Aksiom 3 til å danne mengden  $C = \{x \in A : x \notin x\}$ . Vi påstår nå at

$$\forall x (x \in C \Leftrightarrow x \notin x).$$

Vi viser dette: La  $x$  være vilkårlig. Anta først at  $x \in C$ . Fra definisjonen av  $C$  får vi da spesielt at  $x \notin x$ . Anta så at  $x \notin x$ . Per antagelsen om  $A$  har vi at  $x \in A$ . Men fra definisjonen av  $C$  får vi nå at  $x \in C$ . Dette beviser ekvivalensen over.

Men vi har nå vist at predikatet  $x \notin x$  er mengdebyggende. I Eksempel 2.10 så vi at dette gir en selvmodsigelse. Vi blir derfor nødt til å konkludere med at  $\top$  ikke er mengdebyggende.

### Løsning oppgave 4

1 Vi skal vise at

$$A \cup \left( \bigcup \mathcal{B} \right) = \bigcup (\{A\} \cup \mathcal{B}).$$

Først viser vi inklusjonen fra venstre til høyre. Anta derfor at  $x \in A \cup (\bigcup \mathcal{B})$ . Dette gir to tilfeller:

- I første tilfelle er  $x \in A$ . Siden  $A \in \{A\} \cup \mathcal{B}$ , konkluderer vi med at  $x \in \bigcup (\{A\} \cup \mathcal{B})$ .
- I andre tilfelle er  $x \in \bigcup \mathcal{B}$ . Da fins det en  $B \in \mathcal{B}$  slik at  $x \in B$ . Siden  $B \in \{A\} \cup \mathcal{B}$ , konkluderer vi med at  $x \in \bigcup (\{A\} \cup \mathcal{B})$ .

I hvert tilfelle ser vi altså at  $x \in \bigcup (\{A\} \cup \mathcal{B})$ . Vi konkluderer med at  $A \cup (\bigcup \mathcal{B}) \subseteq \bigcup (\{A\} \cup \mathcal{B})$ .

Vi viser så den andre inklusjonen. La  $x \in \bigcup (\{A\} \cup \mathcal{B})$ . Det fins da en  $C \in \{A\} \cup \mathcal{B}$  slik at  $x \in C$ . Her får vi to tilfeller:

- I første tilfelle er  $C \in \{A\}$ . Da får vi  $C = A$ . Vi har altså  $x \in A$ . Da er også  $x \in A \cup (\bigcup \mathcal{B})$ .
- I andre tilfelle er  $C \in \mathcal{B}$ . Vi har altså at  $x \in C$  der  $C \in \mathcal{B}$ , som gir  $x \in \bigcup \mathcal{B}$  per definisjon. Dette gir også  $x \in A \cup (\bigcup \mathcal{B})$ .

I hvert tilfelle nådde vi konklusjonen  $x \in A \cup (\bigcup \mathcal{B})$ . Vi slutter at  $\bigcup (\{A\} \cup \mathcal{B}) \subseteq A \cup (\bigcup \mathcal{B})$ . Til sammen gir disse to inklusjonene at  $\bigcup (\{A\} \cup \mathcal{B}) = A \cup (\bigcup \mathcal{B})$ .

2 Vi definerer

$$\mathcal{C} = \{C \in \mathcal{P}(A \cup (\bigcup \mathcal{B})) : \exists B \in \mathcal{B} (C = A \cup B)\}.$$

Vi påstår da at

$$\forall C \left( C \in \mathcal{C} \iff \exists B \in \mathcal{B} (C = A \cup B) \right).$$

For å vise dette lar vi  $C$  være en vilkårlig mengde. Vi antar vi først at  $C \in \mathcal{C}$ . Definisjonen av  $\mathcal{C}$  gir spesielt at  $\exists B \in \mathcal{B} (C = A \cup B)$ .

Anta så at  $C$  tilfredsstiller  $\exists B \in \mathcal{B} (C = A \cup B)$ . La  $B \in \mathcal{B}$  være en slik mengde med egenskapen  $C = A \cup B$ . Siden  $B \subseteq \bigcup \mathcal{B}$ , får vi at  $C \subseteq A \cup (\bigcup \mathcal{B})$  (siste punkt i Proposisjon 2.20 i forelesningsnotatene). Dermed er  $C \in \mathcal{P}(A \cup (\bigcup \mathcal{B}))$ . Dette viser at  $C \in \mathcal{C}$ .

Vi har dermed vist at  $\mathcal{C}$  inneholder nøyaktig de elementene  $C$  som tilfredsstiller predikatet, og slutter derfor at predikatet er mengdebyggende.

**3** Vi skal vise at

$$A \cup \left( \bigcap \mathcal{B} \right) = \bigcap \{A \cup B : B \in \mathcal{B}\}.$$

La først  $x \in A \cup (\bigcap \mathcal{B})$ . Vi får da to tilfeller:

- I første tilfelle er  $x \in A$ . La nå  $B \in \mathcal{B}$  være vilkårlig. Vi har da at  $x \in A \cup B$ . Siden dette gjelder for alle  $B \in \mathcal{B}$ , kan vi slutte at  $x \in \bigcap \{A \cup B : B \in \mathcal{B}\}$ .
- I andre tilfelle er  $x \in \bigcap \mathcal{B}$ . La nå  $B \in \mathcal{B}$  være vilkårlig. Vi har da at  $x \in B$ . Spesielt gir dette at  $x \in A \cup B$ . Siden  $B \in \mathcal{B}$  var vilkårlig, kan vi slutte at  $x \in \bigcap \{A \cup B : B \in \mathcal{B}\}$ .

I hvert tilfelle har vi altså at  $x \in \bigcap \{A \cup B : B \in \mathcal{B}\}$ . Siden  $x$  var vilkårlig, gjelder altså inklusjonen fra venstre til høyre.

La nå  $x \in \bigcap \{A \cup B' : B' \in \mathcal{B}\}$ . Vi ønsker å vise at  $x \in A \cup (\bigcap \mathcal{B})$ , altså  $x \in A \vee x \in \bigcap \mathcal{B}$ . Vi tar i bruk Bevisteknikk 6, og antar at  $x \notin A$ . Vi ønsker nå å vise at  $x \in \bigcap \mathcal{B}$ . La derfor  $B \in \mathcal{B}$  være vilkårlig. Fra antagelsen at  $x \in \bigcap \{A \cup B' : B' \in \mathcal{B}\}$ , får vi at  $x \in A \cup B$ . Men siden  $x \notin A$ , kan vi konkludere med at  $x \in B$ . Siden  $B \in \mathcal{B}$  var vilkårlig, slutter vi at  $x \in \bigcap \mathcal{B}$ . Ergo har vi at  $\bigcap \{A \cup B' : B' \in \mathcal{B}\} \subseteq A \cup (\bigcap \mathcal{B})$ . Vi har nå vist at inklusjonen går begge veier, hvilket konkluderer beviset.

## Løsning oppgave 5

**1** Følgende bevis etablerer sannheten av utsagnet: La  $A$  og  $B$  være vilkårlige mengder. Først viser vi at  $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ . La  $C \in \mathcal{P}(A \cap B)$ . Da er  $C \subseteq A \cap B$ . Siden  $A \cap B \subseteq A$  og  $A \cap B \subseteq B$ , får vi  $C \subseteq A$  og  $C \subseteq B$  (Proposisjon 2.3 i forelesningsnotatene). Dette gir da  $C \in \mathcal{P}(A)$  og  $C \in \mathcal{P}(B)$ , så  $C \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ . Siden  $C$  var vilkårlig, slutter vi at  $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ .

Anta nå at  $C \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ . Vi får da  $C \in \mathcal{P}(A)$  og  $C \in \mathcal{P}(B)$ , så  $C \subseteq A$  og  $C \subseteq B$ . Vi kan nå bruke (2.9) fra Proposisjon 2.20 i forelesningsnotatene og få  $C \cap B \subseteq A \cap B$ . Siden  $C \subseteq B$ , gir del 3 av oppgave 1 at  $C \cap B = C$ . Vi har dermed  $C \subseteq A \cap B$ , altså  $C \in \mathcal{P}(A \cap B)$ . Siden  $C$  var vilkårlig, slutter vi at  $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$ . Vi har nå vist at  $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ .

**2** Dette stemmer ikke. La for eksempel  $A = \{\emptyset\}$  og  $B = \{\{\emptyset\}\}$ . Sett  $C = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ . Da er  $C = A \cup B$ . Videre er  $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, A\}$  og  $\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, B\}$ . Vi ser at  $C \notin \mathcal{P}(A)$  og  $C \notin \mathcal{P}(B)$ , så  $C \notin \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ .

**3** Dette stemmer: La  $A$  og  $B$  være mengder, og anta at  $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$ . Vi ønsker nå å vise at  $A = B$ , så la først  $x \in A$ . Da er  $\{x\} \in \mathcal{P}(A)$ . Siden  $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$ , får vi  $\{x\} \in \mathcal{P}(B)$ , som gir  $\{x\} \subseteq B$ . Dette gir  $x \in B$ . Vi har nå vist at  $A \subseteq B$ . På den andre siden, om  $x \in B$ , får vi  $\{x\} \in \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A)$ , som på samme måte gir  $x \in A$ . Vi konkluderer med at  $A = B$ .

## Løsning oppgave 6

Vi antar at regularitetsaksiomet stemmer. La  $A$  være en vilkårlig mengde, og anta for en selvmodsigelse at  $A \in A$ . Siden  $\{A\}$  er ikke-tom, gir regularitetsaksiomet at det fins en mengde  $B \in \{A\}$  slik at  $\{A\} \cap B = \emptyset$ . Siden  $B \in \{A\}$  må  $B = A$ . Vi har da at  $A \cap \{A\} = \emptyset$ . Vi har nå både  $A \in A$  og  $A \in \{A\}$ , så vi får at  $A \in A \cap \{A\}$ , som motstrider at denne mengden er tom. Eneste konklusjon er altså at  $A \in A$  ikke kan inntreffe.