MAT1140 H26 oppgaver uke 37

Oppgave 1

Bevis følgende identiteter for mengder A, B og C:

$$\begin{aligned} A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C), \\ A \times (B \cup C) &= (A \times B) \cup (A \times C), \\ A \subseteq B \quad &\Leftrightarrow \quad A \cap B = A. \end{aligned}$$

Oppgave 2

La $\mathcal{A} = \Big\{\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \big\{\{\emptyset\}\big\}\Big\}$. Beskriv $\bigcup \mathcal{A}$ og $\bigcap \mathcal{A}$.

Oppgave 3

Bevis at predikatet $\top$ ikke er mengdebyggende, altså at utsagnet

$$\exists A \forall B \, (B \in A)$$

er usant. (Med andre ord: Det fins ikke en mengde som inneholder alle mengder)

Oppgave 4

I denne oppgaven viser vi analoger av identitetene $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ og $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ for mengder av mengder.

La A og $\mathcal{B}$ være mengder.

1. Vis at
$$A \cup \Big(\bigcup \mathcal{B}\Big) = \bigcup (\{A\} \cup \mathcal{B}).$$
2. Vis at følgende predikat i variabelen C er mengdebyggende:
$$\exists B \in \mathcal{B} \, (C = A \cup B).$$

La oss betegne den korresponderende mengden med $\{A \cup B : B \in \mathcal{B}\}$, altså

$$\{A \cup B : B \in \mathcal{B}\} = \{C : \exists B \in \mathcal{B} \, (C = A \cup B)\}.$$

3. Anta at $\mathcal{B}$ er ikke-tom. Vis at
$$A \cup \Big(\bigcap \mathcal{B}\Big) = \bigcap \{A \cup B : B \in \mathcal{B}\}.$$

Oppgave 5

Avgjør hvilke av følgende utsagn som er sanne ved å gi et bevis eller et moteksempel i hvert tilfelle.

1. $\forall A \forall B \, \big(\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)\big)$.
2. $\forall A \forall B \, \big(\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)\big)$
3. $\forall A \forall B \, \big(\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B) \implies A = B\big)$.

Oppgave 6

Et av ZFC-aksiomene kalles regularitetsaksiomet og sier følgende:

Aksiom (Regularitet)

$$\forall A \Big(A \neq \emptyset \ \Rightarrow \ \big(\exists B (B \in A \wedge B \cap A = \emptyset) \big) \Big).$$

Vis (ved å bruke de andre aksiomene vi har introdusert så langt) at aksiomet over impliserer at ingen mengder kan inneholde seg selv, altså $\forall A \, (A \notin A)$.