

## MAT1140 H26 oppgaver uke 38

I dette oppgavesettet gjør vi forkortningen  $0 = \emptyset$ ,  $1 = \{0\}$ ,  $2 = \{0, 1\}$ , og  $3 = \{0, 1, 2\}$ .

### Oppgave 1

1. La  $f: 3 \rightarrow 2$  være gitt ved  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$  og  $f(2) = 1$ . Finn en høyre-invers til  $f$ .
2. La  $g: 3 \rightarrow 3$  være gitt ved  $g(0) = 1$ ,  $g(1) = 2$  og  $g(2) = 0$ . Beregn  $g \circ g$  og  $g \circ g \circ g$ . Er  $g$  invertibel? Beskriv i så fall inversen til  $g$ .
3. La  $h: 2 \rightarrow 3$  være gitt ved  $h(0) = 2$  og  $h(1) = 1$ . Finn en venstre-invers til  $h$ . Har  $h$  en invers?

### Oppgave 2

La  $A$  være en mengde.

1. Vis at det fins nøyaktig én funksjon fra  $A$  til  $1$ .
2. Finn en invertibel funksjon (altså en funksjon med en invers) fra  $A^1$  til  $A$  (her betegner  $A^1$  mengden av funksjoner fra  $1$  til  $A$ ).

### Oppgave 3

Gitt en mengde  $A$ , la oss kalle en funksjon  $f: A \rightarrow A$  for *idempotent* dersom  $f \circ f = f$  (legg merke til at denne komposisjonen kun gir mening siden  $f$  har samme domene og kodomene).

1. Vis at funksjonene  $f, g: 3 \rightarrow 3$  gitt ved  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 0$ ,  $f(2) = 0$ , og  $g(0) = 1$ ,  $g(1) = 1$  og  $g(2) = 2$  begge er idempotente.
2. Gi et eksempel på en funksjon  $3 \rightarrow 3$  som ikke er idempotent.
3. La  $A$  være en mengde og la  $C \subseteq A$ . Definer en funksjon  $\alpha: \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A)$  ved

$$\alpha(B) = B \cap C, \quad B \in \mathcal{P}(A).$$

Er  $\alpha$  idempotent?

4. La  $A$  være en mengde. Vis at identitetsfunksjonen på  $A$  er den eneste funksjonen  $A \rightarrow A$  som både er idempotent og invertibel.

### Oppgave 4

La  $X$  være en mengde. Gitt en delmengde  $A \subseteq X$  så er den *karakteristiske funksjonen* til  $A$  funksjonen  $\chi_A: X \rightarrow 2$  gitt ved

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Vis at funksjonen

$$\Phi: \mathcal{P}(X) \rightarrow 2^X$$

definert ved

$$\Phi(A) = \chi_A, \quad A \in \mathcal{P}(X),$$

er invertibel.

## Oppgave 1 løsning

1. Vi kan for eksempel definere  $g: 2 \rightarrow 3$  ved  $g(0) = 0$  og  $g(1) = 1$ . Vi ser da at

$$\begin{aligned}(f \circ g)(0) &= f(g(0)) = f(0) = 0, \\ (f \circ g)(1) &= f(g(1)) = f(1) = 1.\end{aligned}$$

Dette viser at  $f \circ g = \text{id}_2$ , som betyr at  $g$  er en høyre-invers for  $f$ .

2. Vi beregner

$$\begin{aligned}(g \circ g)(0) &= g(g(0)) = g(1) = 2, \\ (g \circ g)(1) &= g(g(1)) = g(2) = 0, \\ (g \circ g)(2) &= g(g(2)) = g(0) = 1, \\ (g \circ g \circ g)(0) &= g((g \circ g)(0)) = g(2) = 0, \\ (g \circ g \circ g)(1) &= g((g \circ g)(1)) = g(0) = 1, \\ (g \circ g \circ g)(2) &= g((g \circ g)(2)) = g(1) = 2.\end{aligned}$$

Vi ser dermed at  $g \circ g \circ g = \text{id}_3$ . Dette kan leses både  $g \circ (g \circ g) = \text{id}_3$  og  $(g \circ g) \circ g = \text{id}_3$ . Det følger at  $g$  er invertibel, med  $g^{-1} = g \circ g$ .

3. Vi kan for eksempel definere  $k: 3 \rightarrow 2$  ved  $k(0) = 0$ ,  $k(1) = 1$  og  $k(2) = 0$ . Vi får da at

$$\begin{aligned}(k \circ h)(0) &= k(h(0)) = k(2) = 0, \\ (k \circ h)(1) &= k(h(1)) = k(1) = 1.\end{aligned}$$

Vi ser at  $k \circ h = \text{id}_2$ , som viser at  $k$  er en venstre-invers til  $h$ . Dersom  $h$  hadde hatt en invers, så vet vi fra Proposisjon 3.16 i forelesningsnotatene at  $k$  måtte ha vært inversen til  $h$ . Men  $k$  er ikke injektiv: Vi ser at  $k(0) = k(2)$ . Dermed kan ikke  $k$  være bijektiv, så  $k$  kan ikke være invertibel fra Proposisjon 3.21. Men Proposisjon 3.18 sier at  $k$  må være invertibel dersom den er inversen til en invertibel funksjon. Vi konkluderer med at  $h$  ikke har en invers.

## Oppgave 2 løsning

1. Vi definerer en funksjon  $r: A \rightarrow 1$  ved  $r(x) = 0$  for alle  $x \in A$ . For å se at dette er den eneste, anta at  $g: A \rightarrow 1$  er en funksjon. La  $x \in A$  være vilkårlig. Siden  $g(x) \in 1 = \{0\}$ , får vi  $g(x) = 0 = r(x)$ . Siden  $x \in A$  var vilkårlig, konkluderer vi med at  $r = g$ .

2. Definer en funksjon  $\Psi: A^1 \rightarrow A$  ved  $\Psi(f) = f(0)$ . Vi viser at  $\Psi$  er bijektiv. Det følger da fra Proposisjon 3.21 at den har en invers.

For å vise at  $\Psi$  er injektiv, lar vi  $f, g \in A^1$  og antar at  $\Psi(f) = \Psi(g)$ . Per definisjon gir dette at  $f(0) = g(0)$ . Siden domenet til  $f$  og  $g$  er  $1 = \{0\}$ , konkluderer vi med at  $f = g$ . For å vise at  $\Psi$  er surjektiv, lar vi  $x \in A$ . Vi definerer nå en funksjon  $f: 1 \rightarrow A$  ved  $f(0) = x$ . Vi ser da at  $\Psi(f) = f(0) = x$ . Dette viser at  $\Psi$  er surjektiv.

Dette fullfører beviset for at  $\Psi$  er en bijeksjon.

### Oppgave 3 løsning

1. Vi beregner

$$\begin{aligned}(f \circ f)(0) &= f(f(0)) = f(0) = 0 = f(0), \\(f \circ f)(1) &= f(f(1)) = f(0) = 0 = f(0), \\(f \circ f)(2) &= f(f(2)) = f(0) = 0 = f(0), \\(g \circ g)(0) &= g(g(0)) = g(1) = 1 = g(0), \\(g \circ g)(1) &= g(g(1)) = g(1) = 1 = g(1), \\(g \circ g)(2) &= g(g(2)) = g(2) = 2 = g(2).\end{aligned}$$

Vi ser fra utregningene at  $f \circ f = f$  og at  $g \circ g = g$ .

2. Her kan vi for eksempel ta funksjonen  $g$  fra Oppgave 1 punkt 2. Som vi så var  $(g \circ g)(0) = 2$  mens  $g(0) = 1$ . Dermed er  $g$  ikke idempotent.

3. La  $B \in \mathcal{P}(A)$ . Vi ser da at

$$(\alpha \circ \alpha)(B) = \alpha(\alpha(B)) = \alpha(B \cap C) = (B \cap C) \cap C = B \cap (C \cap C) = B \cap C = \alpha(B).$$

Siden  $B$  var vilkårlig, viser dette at  $\alpha \circ \alpha = \alpha$ . Vi konkluderer med at  $\alpha$  er idempotent.

4. Anta at  $f: A \rightarrow A$  er både idempotent og invertibel. Dette gir

$$\text{id}_A = f \circ f^{-1} = (f \circ f) \circ f^{-1} = f \circ (f \circ f^{-1}) = f \circ \text{id}_A = f.$$

### Oppgave 4 løsning

Vi viser at  $\Phi$  er injektiv. La  $A, B \in \mathcal{P}(X)$  og anta at  $\Phi(A) = \Phi(B)$ . Dette gir  $\chi_A = \chi_B$ . La  $x \in X$  være vilkårlig. Vi har da at

$$(x \in A) \Leftrightarrow (\chi_A(x) = 1) \Leftrightarrow (\chi_B(x) = 1) \Leftrightarrow (x \in B).$$

Dette viser at  $A = B$ .

Vi viser at  $\Phi$  er surjektiv. La  $f \in 2^X$ . Sett  $A = \{x \in X : f(x) = 1\}$ . La  $x \in X$  være vilkårlig. Vi ser da at  $\chi_A(x) = 1$  hvis og bare hvis  $x \in A$  hvis og bare hvis  $f(x) = 1$ , og at  $\chi_A(x) = 0$  hvis og bare hvis  $x \notin A$  hvis og bare hvis  $f(x) = 0$ . Vi konkluderer med at  $\Phi(A) = \chi_A = f$ .

Vi har nå vist at  $\Phi$  er bijektiv, som betyr at den er invertibel.