MAT1140 H26 oppgaver uke 38

I dette oppgavesettet gjør vi forkortningen $0 = \emptyset$, $1 = \{0\}$, $2 = \{0, 1\}$, og $3 = \{0, 1, 2\}$.

Oppgave 1

1. La $f\colon 3 \to 2$ være gitt ved $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ og $f(2) = 1$. Finn en høyre-invers til f.
2. La $g\colon 3 \to 3$ være gitt ved $g(0) = 1$, $g(1) = 2$ og $g(2) = 0$. Beregn $g \circ g$ og $g \circ g \circ g$. Er g invertibel? Beskriv i så fall inversen til g.
3. La $h\colon 2 \to 3$ være gitt ved $h(0) = 2$ og $h(1) = 1$. Finn en venstre-invers til h. Har h en invers?

Oppgave 2

La A være en mengde.

1. Vis at det fins nøyaktig én funksjon fra A til 1.
2. Finn en invertibel funksjon (altså en funksjon med en invers) fra A^1 til A (her betegner A^1 mengden av funksjoner fra 1 til A).

Oppgave 3

Gitt en mengde A, la oss kalle en funksjon $f\colon A \to A$ for *idempotent* dersom $f \circ f = f$ (legg merke til at denne komposisjonen kun gir mening siden f har samme domene og kodomene).

1. Vis at funksjonene $f, g\colon 3 \to 3$ gitt ved $f(0) = 0$, $f(1) = 0$, $f(2) = 0$, og $g(0) = 1$, $g(1) = 1$ og $g(2) = 2$ begge er idempotente.
2. Gi et eksempel på en funksjon $3 \to 3$ som ikke er idempotent.
3. La A være en mengde og la $C \subseteq A$. Definer en funksjon $\alpha\colon \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ ved
$$\alpha(B) = B \cap C, \quad B \in \mathcal{P}(A).$$
Er α idempotent?
4. La A være en mengde. Vis at identitetsfunksjonen på A er den eneste funksjonen $A \to A$ som både er idempotent og invertibel.

Oppgave 4

La X være en mengde. Gitt en delmengde $A \subseteq X$ så er den *karakteristiske funksjonen* til A funksjonen $\chi_A\colon X \to 2$ gitt ved
$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$
Vis at funksjonen
$$\Phi\colon \mathcal{P}(X) \to 2^X$$
definert ved
$$\Phi(A) = \chi_A, \quad A \in \mathcal{P}(X),$$
er invertibel.