

MAT1140 H26 oppgaver uke 39

Oppgave 1

La $f: A \rightarrow B$ og $g: B \rightarrow C$ være funksjoner. Bevis følgende:

- a) Dersom f og g er injektive, så er $g \circ f$ injektiv.
- b) Dersom f og g er surjektive, så er $g \circ f$ surjektiv.
- c) Dersom $g \circ f$ er injektiv, så er f injektiv.
- d) Dersom $g \circ f$ er surjektiv, så er g surjektiv.

Oppgave 2

La $f: A \rightarrow B$ være en funksjon. Vis følgende (dette er Oppgave 2.35 i læreboka):

- a) For alle $U \subseteq A$ og $V \subseteq B$ har vi at $f[U] \subseteq V \Leftrightarrow U \subseteq f^{-1}[V]$.
- b) For alle $U \subseteq A$ har vi at $U \subseteq f^{-1}[f[U]]$.
- c) For alle $V \subseteq B$ har vi at $f[f^{-1}[V]] \subseteq V$.
- d) f er injektiv hvis og bare hvis $f^{-1}[f[U]] \subseteq U$ for alle $U \subseteq A$.
- e) f er surjektiv hvis og bare hvis $V \subseteq f[f^{-1}[V]]$ for alle $V \subseteq B$.

Oppgave 3

Denne oppgaven omhandler Peano-aksiomene (Definisjon 4.5 i forelesningsnotatene eller Axiom 3.1.1 i læreboka).

- a) La $N = \{0, 1\}$ og definer $s: N \rightarrow N$ ved $s(0) = 1$ og $s(1) = 1$. Hvilke av Peano-aksiomene er tilfredsstilt av $(N, 0, s)$?
- b) La $N = \{0, 1, 2\}$ og definer $s: N \rightarrow N$ ved $s(0) = 1$, $s(1) = 2$ og $s(2) = 0$. Hvilke av Peano-aksiomene er tilfredsstilt av $(N, 0, s)$?
- c) La $N = (\{0\} \times \mathbb{N}) \cup (\{1\} \times \mathbb{N})$ og definer $s': N \rightarrow N$ ved $s'(0, n) = (0, s(n))$ og $s'(1, n) = (1, s(n))$ for alle $n \in \mathbb{N}$, der s betegner den vanlige suksessor-funksjonen på $\mathbb{N}$. Hvilke av Peano-aksiomene er tilfredsstilt av $(N, (0, 0), s')$?

Oppgave 4

La $(A_i)_{i \in I}$ og $(B_i)_{i \in I}$ være familier av mengder indeksert over samme indeksmengde I . La C være en mengde.

- a) Vis at

$$\left(\prod_{i \in I} A_i\right) \cup \left(\prod_{i \in I} B_i\right) \subseteq \prod_{i \in I} (A_i \cup B_i).$$

Gi et eksempel som viser at den motsatte inklusjonen ikke stemmer.

- b) Finn en bijeksjon

$$\Phi: \left(\prod_{i \in I} A_i\right)^C \rightarrow \prod_{i \in I} A_i^C.$$

(Hint: Her er meningen at man skal generalisere det som skjer i Eksempel 3.22 i forelesningsnotatene, eventuelt læreboka toppen av s. 84)

Oppgave 5 (nøtt)

La A være en mengde og la $f: A \rightarrow A$ være en funksjon. Vi sier at en delmengde $B \subseteq A$ er *lukket under f* dersom $f[B] \subseteq B$.

La $a \in A$ og definer

$$B = \{f^n(a) : n \in \mathbb{N}\}.$$

Vis at B er den *minste* delmengden av A som inneholder a og som er lukket under f : Med dette mener vi at B tilfredsstiller følgende:

- B inneholder a og er lukket under f .
- For enhver delmengde $B' \subseteq A$ som inneholder a og er lukket under f , så må $B \subseteq B'$.

Oppgave 1 løsning

- a) Anta at f og g er injektive. La $x, x' \in A$ og anta at $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$. Per definisjon av komposisjon gir dette at $g(f(x)) = g(f(x'))$. Bruker vi at g er injektiv, får vi at $f(x) = f(x')$. Bruker vi at f er injektiv, får vi at $x = x'$. Dette viser at $g \circ f$ er injektiv.
- b) Anta at f og g er surjektive. La $z \in C$. Siden g er surjektiv, fins det en $y \in B$ slik at $g(y) = z$. Siden f er surjektiv, fins det en $x \in A$ slik at $f(x) = y$. Vi får nå at

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z.$$

Dette viser at $g \circ f$ er surjektiv.

- c) Anta at $g \circ f$ er injektiv. La $x, x' \in A$ og anta at $f(x) = f(x')$. Vi får da at $g(f(x)) = g(f(x'))$, som per definisjon er det samme som $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$. Siden $g \circ f$ er injektiv, konkluderer vi med at $x = x'$. Dette viser at f er injektiv.
- d) Anta at $g \circ f$ er surjektiv. La $z \in C$. Det fins da en $x \in A$ slik at $(g \circ f)(x) = z$. Dette gir $g(f(x)) = z$, hvilket viser at det fins en $y \in B$, nemlig $y = f(x)$, slik at $g(y) = z$. Dermed er g surjektiv.

Oppgave 2 løsning

- a) Anta først at $f[U] \subseteq V$. Vi vil vise at $U \subseteq f^{-1}[V]$, så anta at $x \in U$. Vi har da at $f(x) \in f[U] \subseteq V$, så $f(x) \in V$. Dette gir $x \in f^{-1}[V]$, som fullfører beviset for inklusjonen $U \subseteq f^{-1}[V]$.
- Anta så at $U \subseteq f^{-1}[V]$. Vi vil vise at $f[U] \subseteq V$, så anta at $y \in f[U]$. Det fins da $x \in U$ slik at $f(x) = y$. Siden $U \subseteq f^{-1}[V]$, får vi at $x \in f^{-1}[V]$. Dermed er $y = f(x) \in V$. Dette fullfører beviset for inklusjonen $f[U] \subseteq V$.
- b) La $x \in U$. Da er $f(x) \in f[U]$, så $x \in f^{-1}[f[U]]$ fra definisjonen av forbildet. Dette viser at $U \subseteq f^{-1}[f[U]]$.
- c) La $y \in f[f^{-1}[V]]$. Vi får da at $y = f(x)$ for en $x \in f^{-1}[V]$. Dermed er $y = f(x) \in V$. Dette viser at $f[f^{-1}[V]] \subseteq V$.
- d) Anta først at f er injektiv. La $x \in f^{-1}[f[U]]$. Dette gir $f(x) \in f(U)$, hvilket betyr at det fins $x' \in U$ slik at $f(x') = f(x)$. Injektivitet gir da at $x = x'$, så vi kan slutte at $x \in U$. Dermed har vi at $f^{-1}[f[U]] \subseteq U$.
- Anta så at $f^{-1}[f[U]] \subseteq U$ for alle $U \subseteq A$. La $x, x' \in A$ og anta at $f(x) = f(x')$. Vi har da at $f(x) \in \{f(x')\} = f[\{x'\}]$, så $x \in f^{-1}[f[\{x'\}]]$. Per antagelse får vi at $x \in \{x'\}$, som gir $x = x'$. Dette viser at f er injektiv.
- e) Anta først at f er surjektiv. La $y \in V$. Da fins $x \in A$ slik at $f(x) = y$. Per definisjon får vi at $x \in f^{-1}[V]$, så $y = f(x) \in f[f^{-1}[V]]$. Dette viser at $V \subseteq f[f^{-1}[V]]$.
- Anta så at $V \subseteq f[f^{-1}[V]]$ for alle $V \subseteq B$. La $y \in B$. Per antagelse får vi at $\{y\} \subseteq f[f^{-1}[\{y\}]]$. Dermed er $y \in f[f^{-1}[V]]$, så det fins $x \in f^{-1}[V]$ slik at $f(x) = y$. Vi har dermed vist at f er surjektiv.

Oppgave 3 løsning

- a) Siden $s(0) = s(1) = 1$, så har vi at $s(n) \neq 0$ for alle $n \in N$. Dermed er det første aksiomet tilfredsstilt. Men $s(0) = s(1) = 1$ gir også at s ikke er injektiv, så det andre aksiomet er ikke tilfredsstilt. Til slutt ser vi at de to mengdene

som inneholder 0 er $\{0\}$ og $\{0, 1\}$. Siden $s(0) = 1$, gjelder ikke implikasjonen $\forall n(n \in \{0\} \Rightarrow s(n) \in \{0\})$. Denne implikasjonen gjelder derimot trivielt for $\{0, 1\}$. Vi konkluderer med at det tredje aksiomet er tilfredsstilt.

b) Siden $s(2) = 0$, er ikke første aksiom tilfredsstilt. Vi ser derimot at s er injektiv. Til slutt ser vi at om en delmengde $A \subseteq N$ inneholder 0 og i tillegg tilfredsstiller $\forall n(n \in A \Rightarrow s(n) \in A)$, så må den inneholde $s(0) = 1$ og deretter $s(1) = 2$. Dermed er $A = N$, så det tredje aksiomet er tilfredsstilt.

c) Her er det første aksiomet tilfredsstilt: Anta nemlig at det fins en $(i, n) \in N$ slik at $s'(i, n) = (i, s(n)) = (0, 0)$. Da fås $i = 0$ og $s(n) = 0$, men sistnevnte inntreffer aldri. Vi konkluderer derfor med at $s'(i, n) \neq 0$ for alle $(i, n) \in N$.

Videre er s' injektiv: La $(i, n), (i', n') \in N$ og anta at $s(i, n) = s(i', n')$. Vi får per definisjon at $i = i'$ og $s(n) = s(n')$. Siden s er injektiv, får vi at $n = n'$. Dermed har vi at $(i, n) = (i', n')$.

Her feiler derimot det tredje aksiomet. Mengden $A = \{0\} \times \mathbb{N} \subseteq N$ inneholder nemlig $(0, 0)$, og dersom vi antar at $(i, n) \in A$, så får vi også at $s'(i, n) = (i, s(n)) \in A$. Siden $A \neq N$, er altså tredje aksiom ikke tilfredsstilt.

Oppgave 4 løsning

a) Vi viser først inklusjonen. La $(x_i)_{i \in I} \in (\prod_{i \in I} A_i) \cup (\prod_{i \in I} B_i)$. Vi får da to tilfeller:

- I det første tilfellet er $(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_i$. Dermed får vi at $x_i \in A_i$ for hver $i \in I$. Dette gir spesielt $x_i \in A_i \cup B_i$ for hver $i \in I$. Vi konkluderer med at $(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} (A_i \cup B_i)$.
- I det andre tilfellet er $(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} B_i$. Dermed får vi at $x_i \in B_i$ for hver $i \in I$. Dette gir spesielt $x_i \in A_i \cup B_i$ for hver $i \in I$. Vi konkluderer med at $(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} (A_i \cup B_i)$.

I hvert tilfelle oppnår vi $(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} (A_i \cup B_i)$. Siden $(x_i)_{i \in I}$ var vilkårlig, konkluderer vi med at den ønskede inklusjonen holder.

For å se at den motsatte inklusjonen ikke holder, la $I = \{0, 1\}$, $A_0 = \{0\}$, $A_1 = \emptyset$, $B_0 = \emptyset$ og $B_1 = \{0\}$. Da er $\prod_{i \in I} A_i = \emptyset$ og $\prod_{i \in I} B_i = \emptyset$. Men $A_0 \cup B_0 = \{0\}$ og $A_1 \cup B_1 = \{0\}$, så $\prod_{i \in I} (A_i \cup B_i) = \{(0, 0)\}$.

b) For hver $j \in I$ definerer vi en funksjon $p_i: \prod_{i \in I} A_i \rightarrow A_j$ ved $p_j((a_i)_{i \in I}) = a_j$. Legg merke til at dersom $a, b \in \prod_{i \in I} A_i$ tilfredsstiller $p_i(a) = p_i(b)$ for alle $i \in I$, altså $a_i = b_i$ for alle $i \in I$, så må $a = b$.

Videre definerer vi

$$\Phi(f) = (p_i \circ f)_{i \in I}, \quad f \in \left(\prod_{i \in I} A_i \right)^C.$$

Vi sjekker nå at Φ er injektiv. Anta at $\Phi(f) = \Phi(g)$. Dette gir per definisjon av Φ at $p_i \circ f = p_i \circ g$ for alle $i \in I$. Evaluerer vi i $z \in C$ får vi at

$$p_i(f(z)) = (p_i \circ f)(z) = (p_i \circ g)(z) = p_i(g(z)).$$

Siden dette gjelder for hver $i \in I$, slutter vi at $f(z) = g(z)$. Siden dette gjelder for hver $z \in C$, slutter vi at $f = g$. Dette viser injektivitet.

For å vise surjektivitet antar vi at $(f_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_i^C$. Definer en funksjon $f \in \left(\prod_{i \in I} A_i \right)^C$ ved

$$f(z) = (f_i(z))_{i \in I}, \quad z \in C.$$

Om vi lar $z \in C$ og $i \in I$ så ser vi at

$$(p_i \circ f)(z) = p_i(f(z)) = f_i(z).$$

Siden dette gjelder for hver $z \in C$, kan vi slutte at $p_i \circ f = f_i$ for hver $i \in I$. Vi ser dermed at

$$\Phi(f) = (p_i \circ f)_{i \in I} = (f_i)_{i \in I}.$$

Oppgave 5 løsning

Vi ser at $a = f^0(a) \in B$. For å vise at B er lukket under f , la $x \in B$. Per definisjon fins det en $n \in \mathbb{N}$ slik at $x = f^n(a)$. Vi får da at $f(x) = f(f^n(a)) = f^{s(n)}(a) \in B$. Dette viser at B er lukket under f .

La nå $B' \subseteq S$ være en mengde som inneholder a og er lukket under f . Vi ønsker å vise at $B \subseteq B'$. Dette innebærer å vise at for alle $n \in \mathbb{N}$ så gjelder $f^n(a) \in B'$. Vi viser dette utsagnet ved induksjon. For $n = 0$ har vi at $a = f^0(a) \in B'$ per antagelse. La nå $n \in \mathbb{N}$ og anta at $f^n(a) \in B'$. Siden B' er lukket under f , får vi at $f(f^n(a)) \in B'$. Siden $f(f^n(a)) = f^{s(n)}(a)$, konkluderer vi med at $f^{s(n)}(a) \in B'$. Dette viser induksjonssteget, og vi har dermed vist at $f^n(a) \in B'$ for alle $n \in \mathbb{N}$ ved induksjon.