MAT1140 H26 oppgaver uke 39

Oppgave 1

La $f\colon A \to B$ og $g\colon B \to C$ være funksjoner. Bevis følgende:

a) Dersom f og g er injektive, så er $g \circ f$ injektiv.

b) Dersom f og g er surjektive, så er $g \circ f$ surjektiv.

c) Dersom $g \circ f$ er injektiv, så er f injektiv.

d) Dersom $g \circ f$ er surjektiv, så er g surjektiv.

Oppgave 2

La $f\colon A \to B$ være en funksjon. Vis følgende (dette er Oppgave 2.35 i læreboka):

a) For alle $U \subseteq A$ og $V \subseteq B$ har vi at $f[U] \subseteq V \Leftrightarrow U \subseteq f^{-1}[V]$.

b) For alle $U \subseteq A$ har vi at $U \subseteq f^{-1}[f[U]]$.

c) For alle $V \subseteq B$ har vi at $f[f^{-1}[V]] \subseteq V$.

d) f er injektiv hvis og bare hvis $f^{-1}[f[U]] \subseteq U$ for alle $U \subseteq A$.

e) f er surjektiv hvis og bare hvis $V \subseteq f[f^{-1}[V]]$ for alle $V \subseteq B$.

Oppgave 3

Denne oppgaven omhandler Peano-aksiomene (Definisjon 4.5 i forelesningsnotatene eller Aksiom 3.1.1 i læreboka).

a) La $N = \{0, 1\}$ og definer $s\colon N \to N$ ved $s(0) = 1$ og $s(1) = 1$. Hvilke av Peano-aksiomene er tilfredsstilt av $(N, 0, s)$?

b) La $N = \{0, 1, 2\}$ og definer $s\colon N \to N$ ved $s(0) = 1$, $s(1) = 2$ og $s(2) = 0$. Hvilke av Peano-aksiomene er tilfredsstilt av $(N, 0, s)$?

c) La $N = (\{0\} \times \mathbb{N}) \cup (\{1\} \times \mathbb{N})$ og definer $s'\colon N \to N$ ved $s'(0, n) = (0, s(n))$ og $s'(1, n) = (1, s(n))$ for alle $n \in \mathbb{N}$, der s betegner den vanlige suksessor-funksjonen på $\mathbb{N}$. Hvilke av Peano-aksiomene er tilfredsstilt av $(N, (0, 0), s')$?

Oppgave 4

La $(A_i)_{i \in I}$ og $(B_i)_{i \in I}$ være familier av mengder indeksert over samme indeksmengde I. La C være en mengde.

a) Vis at

$$\Big(\prod_{i \in I} A_i\Big) \cup \Big(\prod_{i \in I} B_i\Big) \subseteq \prod_{i \in I} (A_i \cup B_i).$$

Gi et eksempel som viser at den motsatte inklusjonen ikke stemmer.

b) Finn en bijeksjon

$$\Phi\colon \Big(\prod_{i \in I} A_i\Big)^C \to \prod_{i \in I} A_i^C.$$

(Hint: Her er meningen at man skal generalisere det som skjer i Eksempel 3.22 i forelesningsnotatene, eventuelt læreboka toppen av s. 84)

Oppgave 5 (nøtt)

La A være en mengde og la $f\colon A \to A$ være en funksjon. Vi sier at en delmengde $B \subseteq A$ er *lukket under* f dersom $f[B] \subseteq B$.
La $a \in A$ og definer

$$B = \{f^n(a) : n \in \mathbb{N}\}.$$

Vis at B er den *minste* delmengden av A som inneholder a og som er lukket under f: Med dette mener vi at B tilfredsstiller følgende:

- B inneholder a og er lukket under f.
- For enhver delmengde $B' \subseteq A$ som inneholder a og er lukket under f, så må $B \subseteq B'$.