

MAT1140 H26 oppgaver uke 40

Oppgave 1

La A være en mengde. La $\cup$ og $\cap$ betegne binæroperasjonene på $\mathcal{P}(A)$ gitt ved å ta henholdsvis binær union og binært snitt, altså $U \cup V$ og $U \cap V$ for to mengder $U, V \in \mathcal{P}(A)$.

- a) Begrunn at $\cup$ og $\cap$ begge er assosiative og kommutative binæroperasjoner.
- b) Har $\cup$ et nøytralt element? Hva med $\cap$?
- c) Er $\cup$ og $\cap$ kansellative?

Oppgave 2

I denne oppgaven skal du gjøre bevisene for multiplikasjon som vi utelot i forelesningene.

- a) Vi viste først i forelesningen at $a(b + c) = ab + ac$ for alle $a, b, c \in \mathbb{N}$. Vis at $(a + b)c = ac + bc$ for alle $a, b, c \in \mathbb{N}$. Konkluder med at multiplikasjon er distributiv over addisjon.
- b) Vis nå at $1 = s(0)$ er et nøytralt element for multiplikasjon.

Oppgave 3

Vi ga en rekursiv definisjon av eksponentiering i Definisjon 4.27, som lød som følger: Gitt $a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ så definerer vi

$$\begin{aligned} a^0 &= 1, \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad a^{s(n)} &= a^n \cdot a. \end{aligned}$$

Bevis Proposisjon 4.28 i forelesningsnotatene, altså følgende identiteter for alle $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ og $m, n \in \mathbb{N}$:

$$(ab)^n = a^n b^n, \tag{1}$$

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n, \tag{2}$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}. \tag{3}$$

Hint: Induksjon er nøkkelen.

Oppgave 4 (nøtt)

Anta at $(N, s, 0)$ og $(N', s', 0')$ er to tripler som tilfredsstiller Peano-aksiomene. Vis ved å bruke rekursjon at det fins en unik funksjon $\phi: N \rightarrow N'$ slik at $\phi(0) = 0'$ og $\phi \circ s = s' \circ \phi$, og at ϕ er invertibel.

(Denne oppgaven viser, sammen med Teorem 4.6 i forelesningsnotatene, at det for alle praktiske formål fins nøyaktig ett trippel $(N, s, 0)$ som tilfredsstiller Peano-aksiomene. Den spesifikke konstruksjonen vi gjør i forelesningsnotatene spiller dermed ingen rolle.)

Oppgave 1 løsning

a) Begge binæroperasjonene er assosiative og kommutative, da dette bunner i egenskapene

$$(U \cap V) \cap W = U \cap (V \cap W), \\ U \cap V = V \cap U,$$

for $U, V, W \in \mathcal{P}(A)$, og tilsvarende for $\cup$, som er å finne f.eks. i Proposisjon 2.20 i forelesningsnotatene.

b) Ja, $\emptyset$ er et nøytralt element for $\cup$, og A er et nøytralt element for $\cap$. Dette kommer av identitetene

$$U \cup \emptyset = U, \\ U \cap A = U,$$

for $U, V \in \mathcal{P}(A)$.

c) Nei, ingen av dem er generelt kansellative. For union så har vi for enhver $U \in \mathcal{P}(A)$ at $U \cup A = A$. Dermed er $U \cup A = V \cup A$ for ethvert par $U, V \in \mathcal{P}(A)$ uten at det trenger å implisere at $U = V$ (med mindre $A = \emptyset$).

Tilsvarende er alltid $U \cap \emptyset = \emptyset$, så $U \cap \emptyset = V \cap \emptyset$ gjelder alltid uten at vi nødvendigvis har $U = V$.

Oppgave 2 løsning

a) La $a, b \in \mathbb{N}$. Vi viser utsagnet

$$P(c) : (a + b)c = ac + bc$$

ved induksjon. Ved å bruke definisjonen av multiplikasjon får vi at

$$(a + b)0 = 0 = 0 + 0 = a0 + b0.$$

Dette viser at $P(0)$ stemmer. Anta så at $c \in \mathbb{N}$ er slik at $P(c)$ stemmer, altså at $(a + b)c = ac + bc$. Ved å bruke dette i tillegg til at addisjon er assosiativ og kommutativ, fås

$$(a + b)s(c) = (a + b) + (a + b)c = (a + b) + (ac + bc) = (a + ac) + (b + bc) = as(c) + bs(c).$$

Dette beviser $P(s(c))$. Vi slutter at $P(c)$ holder for alle $c \in \mathbb{N}$.

b) Ved å bruke definisjonen av multiplikasjon får vi at

$$a1 = as(0) = a0 + a = a.$$

Vi beviser $1a = a$ for alle $a \in \mathbb{N}$ ved å bruke induksjon. La $Q(a)$ betegne predikatet $1a = a$. Siden $1 \cdot 0 = 0$ fra Proposisjon 4.24, har vi at $Q(0)$ stemmer.

Anta nå at $Q(a)$ stemmer for en gitt $a \in \mathbb{N}$, altså at $1a = a$. Ved å bruke $a + 0 = a$ fra definisjonen av addisjon får vi

$$1s(a) = 1a + 1 = a + 1 = a + s(0) = s(a + 0) = s(a).$$

Dette viser $Q(s(a))$. Dermed stemmer utsagnet for alle $a \in \mathbb{N}$ ved induksjon.

Oppgave 3 løsning

La $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Vi viser $(ab)^n = a^n b^n$ ved induksjon. For $n = 0$ fås $(ab)^0 = 1 = 1 \cdot 1 = a^0 \cdot b^0$. La nå $n \in \mathbb{N}$ og anta at $(ab)^n = a^n b^n$. Ved å bruke at multiplikasjon er både assosiativt og kommutativt, får vi at

$$(ab)^{s(n)} = (ab)^n (ab) = (a^n a)(b^n b) = a^{s(n)} b^{s(n)}.$$

Dermed er utsagnet bevist for alle $n \in \mathbb{N}$ ved induksjon.

Nå fikserer vi $a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ og $m \in \mathbb{N}$, og beviser $a^{m+n} = a^m a^n$ ved induksjon på n . For $n = 0$ får vi

$$a^{m+0} = a^m = a^m \cdot 1 = a^m \cdot a^0.$$

Nå lar vi $n \in \mathbb{N}$ og antar at $a^{m+n} = a^m a^n$. Bruker vi dette sammen med definisjonen av addisjon og assosiativitet av multiplikasjon får vi at

$$a^{m+s(n)} = a^{s(m+n)} = a^{m+n} a = (a^m a^n) a = a^m (a^n a) = a^m a^{s(n)}.$$

Dette beviser påstanden ved induksjon for alle $n \in \mathbb{N}$.

Fikser igjen $a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ og $m \in \mathbb{N}$. Vi beviser $(a^m)^n = a^{mn}$ ved induksjon på n . Ved å fritt benytte regnereglene vi har etablert, er grunnsteget

$$(a^m)^0 = 1 = a^0 = a^{m \cdot 0}.$$

La så $n \in \mathbb{N}$ og anta at $(a^m)^n = a^{mn}$. Ved å bruke forrige identitet samt regneregler for multiplikasjon, får vi at

$$(a^m)^{s(n)} = (a^m)^n (a^m) = (a^{mn}) a^m = a^{mn+m} = a^{m(n+1)} = a^{ms(n)}.$$

Dette etablerer utsagnet for alle $n \in \mathbb{N}$ ved induksjon.

Oppgave 4 løsning

Nøkkelen her er at Teorem 4.12 i forelesningsnotatene holder for begge tripler. Vi kan dermed bruke teoremet med hensyn på $(N, s, 0)$ og få en unik funksjon $\phi: N \rightarrow N'$ slik at $\phi(0) = 0'$ og $\phi \circ s = s' \circ \phi$.

For å vise at ϕ er en bijeksjon, bruker vi teoremet med hensyn på $(N', s', 0')$ og får en unik funksjon $\psi: N' \rightarrow N$ slik at $\psi(0') = 0$ og $\psi \circ s' = s \circ \psi$. Dermed er $\psi \circ \phi: N \rightarrow N$ en funksjon som tilfredsstiller $(\psi \circ \phi)(0) = \psi(0') = 0$, og

$$(\psi \circ \phi) \circ s = \psi \circ (\phi \circ s) = \psi \circ (s' \circ \phi) = (\psi \circ s') \circ \phi = (s \circ \psi) \circ \phi = s \circ (\psi \circ \phi).$$

Men vi vet fra Teorem 4.12 at den unike funksjonen $N \rightarrow N$ med disse egenskapene er funksjonen id_N , så vi må konkludere med at $\psi \circ \phi = \text{id}_N$. Vi viser tilsvarende at funksjonen $\phi \circ \psi: N' \rightarrow N'$ tilfredsstiller $(\phi \circ \psi)(0') = 0'$ og $(\phi \circ \psi) \circ s' = s' \circ (\phi \circ \psi)$. Dermed kan vi tilsvarende konkludere med at $\phi \circ \psi = \text{id}_{N'}$. Dette viser at ϕ er invertibel, og dermed bijektiv.