MAT1140 H26 oppgaver uke 40

Oppgave 1

La A være en mengde. La $\cup$ og $\cap$ betegne binæroperasjonene på $\mathcal{P}(A)$ gitt ved å ta henholdsvis binær union og binært snitt, altså $U \cup V$ og $U \cap V$ for to mengder $U, V \in \mathcal{P}(A)$.

a) Begrunn at $\cup$ og $\cap$ begge er assosiative og kommutative binæroperasjoner.

b) Har $\cup$ et nøytralt element? Hva med $\cap$?

c) Er $\cup$ og $\cap$ kansellative?

Oppgave 2

I denne oppgaven skal du gjøre bevisene for multiplikasjon som vi utelot i forelesningene.

a) Vi viste først i forelesningen at $a(b + c) = ab + ac$ for alle $a, b, c \in \mathbb{N}$. Vis at $(a+b)c = ac+bc$ for alle $a, b, c \in \mathbb{N}$. Konkluder med at multiplikasjon er distributiv over addisjon.

b) Vis nå at $1 = s(0)$ er et nøytralt element for multiplikasjon.

Oppgave 3

Vi ga en rekursiv definisjon av eksponentiering i Definisjon 4.27, som lød som følger: Gitt $a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ så definerer vi

$$a^0 = 1,$$
$$\forall n \in \mathbb{N} \;\; a^{s(n)} = a^n \cdot a.$$

Bevis Proposisjon 4.28 i forelesningsnotatene, altså følgende identiteter for alle $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ og $m, n \in \mathbb{N}$:

$$(ab)^n = a^n b^n, \tag{1}$$
$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n, \tag{2}$$
$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}. \tag{3}$$

Hint: Induksjon er nøkkelen.

Oppgave 4 (nøtt)

Anta at $(N, s, 0)$ og $(N', s', 0')$ er to tripler som tilfredsstiller Peano-aksiomene. Vis ved å bruke rekursjon at det fins en unik funksjon $\phi\colon N \to N'$ slik at $\phi(0) = 0'$ og $\phi \circ s = s' \circ \phi$, og at ϕ er invertibel.

(Denne oppgaven viser, sammen med Teorem 4.6 i forelesningsnotatene, at det for alle praktiske formål fins nøyaktig ett trippel $(N, s, 0)$ som tilfredsstiller Peano-aksiomene. Den spesifikke konstruksjonen vi gjør i forelesningsnotatene spiller dermed ingen rolle.)