MAT1140 H26 oppgaver uke 41

Oppgave 1

La $A = \{0, 1, 2\}$ og definer en relasjon $\triangle$ på A ved

$$0\triangle 0,\ 0\triangle 1,\ 1\triangle 0,\ 1\triangle 1,\ 1\triangle 2,\ 2\triangle 1.$$

Som mengde er relasjonen altså definert ved

$$\triangle = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1), (1,2), (2,1)\}.$$

Avgjør hvorvidt $\triangle$ er refleksiv, symmetrisk, anti-symmetrisk og/eller transitiv.

Oppgave 2

La A og B være mengder der A er ikke-tom. Definer en relasjon $\triangle$ på mengden B^A av funksjoner $A \to B$ ved

$$f \triangle g \quad \iff \quad \exists x \in A\ (f(x) = g(x)).$$

Avgjør hvorvidt $\triangle$ generelt er refleksiv, symmetrisk, anti-symmetrisk og/eller transitiv.

Oppgave 3

La A være en mengde med minst to ulike elementer og sett $\mathcal{A} = \mathcal{P}(A) \setminus \{A\}$. Betrakt den ordnede mengden $(\mathcal{A}, \subseteq)$ der $\subseteq$ betegner inklusjon.

a) Vis at $(\mathcal{A}, \subseteq)$ har et minste element, men ikke et største element.

b) Beskriv de maksimale elementene i $(\mathcal{A}, \subseteq)$.

Oppgave 4

La A være en mengde og la $(B, \leq)$ være en ordnet mengde. Definer en relasjon på $\preceq$ på B^A ved at for alle $f, g \in B^A$ så gjelder

$$f \preceq g \quad \iff \quad \forall x \in A\ \big(f(x) \leq g(x)\big).$$

a) Vis at $\preceq$ er en ordensrelasjon på B^A.

b) Vis at dersom B har et minste element, så har B^A et minste element.

c) Vis at dersom enhver ikke-tom delmengde av B har et infimum, så har enhver ikke-tom delmengde av B^A et infimum.

d) Anta at $(B, \leq)$ er totalt ordnet. Behøver $(B^A, \preceq)$ være totalt ordnet?

e) Gi et eksempel som viser at selv om enhver ikke-tom delmengde av B har et minste element, så trenger ikke det samme gjelde for B^A.

Oppgave 5 (nøtt)

I denne oppgaven skal du bevise det mer generelle rekursjonsresultatet i Proposisjon 4.17 i forelesningsnotatene, eventuelt Proposisjon 3.2.9 i boka. La en mengde A, et element $x \in A$ og en funksjon $F\colon \mathbb{N} \times A \to A$ være gitt. Definer funksjonen $\tilde{F}\colon \mathbb{N} \times A \to \mathbb{N} \times A$ ved

$$\tilde{F}(n, y) = (s(n), F(n, y)), \quad (n, y) \in \mathbb{N} \times A.$$

Teorem 4.12 gir da en unik følge $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $\mathbb{N} \times A$ slik at

$$\begin{aligned} v_0 &= (0, x), \\ \forall n \in \mathbb{N} \;\; v_{s(n)} &= \tilde{F}(v_n). \end{aligned}$$

La $p_1\colon \mathbb{N} \times A \to \mathbb{N}$ og $p_2\colon \mathbb{N} \times A \to A$ betegne projeksjonene ned på hver faktor. For hver $n \in \mathbb{N}$ sett

$$\begin{aligned} k_n &= p_1(v_n), \\ u_n &= p_2(v_n). \end{aligned}$$

a) Vis at $k_n = n$ for alle $n \in \mathbb{N}$ ved induksjon.

b) Vis at $u_0 = x$ og $u_{s(n)} = F(n, u_n)$ for hver $n \in \mathbb{N}$.

c) Vis til slutt at følgen $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er entydig med egenskapene $u_0 = x$ og $u_{s(n)} = F(n, u_n)$ for alle $n \in \mathbb{N}$ ved å bruke induksjon.

Oppgave 1 løsning

- Vi ser at $\neg(2 \triangle 2)$, så $\triangle$ er ikke refleksiv.
- Siden $0 \triangle 1$, $1 \triangle 0$, $1 \triangle 2$ og $2 \triangle 1$, og ellers kun $0 \triangle 0$ og $1 \triangle 1$, har vi at $\triangle$ symmetrisk.
- Relasjonen er ikke anti-symmetrisk, da $0 \triangle 1$ og $1 \triangle 0$ men $0 \neq 1$.
- Den er heller ikke transitiv, da $0 \triangle 1$ og $1 \triangle 2$ men $\neg(0 \triangle 2)$.

Oppgave 2 løsning

- $\triangle$ er refleksiv: Siden $A \neq \emptyset$, la $x \in A$. Da gjelder $f(x) = f(x)$, så $f \triangle f$.
- $\triangle$ er alltid symmetrisk: Dersom $f \triangle g$, så fins en $x \in A$ slik at $f(x) = g(x)$. Dette er det samme som $g(x) = f(x)$, så $g \triangle f$.
- $\triangle$ er ikke generelt anti-symmetrisk: La $A = B = \{0, 1\}$ og la $f, g \in B^A$ være gitt ved $f = \mathrm{id}_A$ og $g(0) = g(1) = 0$. Vi har da at $f \triangle g$ siden $f(0) = g(0)$, som også gir $g \triangle f$ siden $\triangle$ er symmetrisk. Men $f \neq g$ siden $f(1) \neq g(1)$.
- $\triangle$ er ikke transitiv: Ta samme eksempel som over og definer $h \in B^A$ ved $h(0) = h(1) = 1$. Da gjelder $g \triangle f$ og $f \triangle h$ siden $f(1) = h(1) = 1$, men $\neg(g \triangle h)$ siden $g(0) \neq h(0)$ og $g(1) \neq h(1)$.

Oppgave 3 løsning

a) Siden $A \neq \emptyset$, har vi at $\emptyset \in \mathcal{A}$. Siden $\emptyset \subseteq B$ for alle $B \in \mathcal{A}$, slutter vi at $\emptyset$ er et minste element i $\mathcal{A}$.
Anta at $\mathcal{A}$ har et største element $C \in \mathcal{A}$. Siden A har minst to ulike elementer, la $x, y \in A$ være distinkte. Da er $A \setminus \{x\}, A \setminus \{y\} \in \mathcal{A}$, så $A \setminus \{x\} \subseteq C$ og $A \setminus \{y\} \subseteq C$. Dette gir $A \setminus C \subseteq \{x\}$ og $A \setminus C \subseteq \{y\}$. Siden $x \neq y$ er eneste mulighet at $A \setminus C = \emptyset$. Men da er $C = A$, som motstrider at $\mathcal{A} = \mathcal{P}(A) \setminus \{A\}$. Altså kan ikke $\mathcal{A}$ ha noe største element.

b) De maksimale elementene er på formen $A \setminus \{x\}$ der $x \in A$. For å se at denne mengden er maksimal, anta at $C \in \mathcal{A}$ er slik at $A \setminus \{x\} \subseteq C$. Siden $C \neq A$, må da $C = A \setminus \{x\}$. Dette viser at $A \setminus \{x\}$ er maksimal. For å se at alle maksimale mengder er på denne formen, anta at $B \in \mathcal{A}$ er maksimal. Siden $B \neq A$, la $x \in A \setminus B$. Vi får da at $B \subseteq A \setminus \{x\}$, som ved maksimalitet gir $B = A \setminus \{x\}$.

Oppgave 4 løsning

a) Refleksivitet: La $f \in B^A$. Siden $f(x) \leq f(x)$ for alle $x \in A$, konkluderer vi med at $f \preceq f$.
Anti-symmetri: La $f, g \in B^A$ og anta at $f \preceq g$ og $g \preceq f$. La $x \in A$. Vi får da at $f(x) \leq g(x)$ og $g(x) \leq f(x)$. Siden $\leq$ er anti-symmetrisk, konkluderer vi med at $f(x) = g(x)$. Siden x var vilkårlig, gir dette at $f = g$.
Transitivitet: La $f, g, h \in B^A$ og anta at $f \preceq g$ og $g \preceq h$. La $x \in A$. Vi får da at $f(x) \leq g(x)$ og $g(x) \leq h(x)$. Siden $\leq$ er transitiv, gir dette at $f(x) \leq h(x)$. Siden x var vilkårlig, slutter vi at $f \preceq h$.

b) La $b \in B$ være det minste elementet i B. Definer $g \in B^A$ ved

$$g(x) = b, \quad x \in A.$$

La $f \in B^A$, og la $x \in A$. Vi får da at $g(x) = b \leq f(x)$. Siden x var vilkårlig, slutter vi at $g \preceq f$. Siden f var vilkårlig, slutter vi at g er et minste element for B^A.

c) Dersom $A = \emptyset$ består B^A av ett element, og i dette tilfellet har den ene ikke-tomme delmengden av B^A, nemlig B^A selv, trivielt et infimum, nemlig dette ene elementet. Anta derfor at $A \neq \emptyset$.
Anta at enhver ikke-tom delmengde av B har et infimum. La $U \subseteq B^A$ være ikke-tom. For hver $x \in A$ er mengden

$$U_x = \{f(x) : f \in U\} \subseteq B$$

ikke-tom, så per antagelse har den et infimum. Definer $f \in B^A$ ved

$$g(x) = \inf U_x, \quad x \in A.$$

Vi viser at g er et infimum for U. La først $f \in U$ være vilkårlig, og la $x \in A$. Siden $g(x)$ er en nedre skranke for U_x og $f(x) \in U_x$, får vi at $g(x) \leq f(x)$. Siden x var vilkårlig, slutter vi at $g \preceq f$. Siden $f \in U$ var vilkårlig, gir dette at g er en nedre skranke for U.

La nå $h \in B^A$ være en nedre skranke for U. La $x \in A$. Dersom $f \in U$, får vi at $h \preceq f$, så spesielt $h(x) \leq f(x)$. Dermed er $h(x)$ en nedre skranke for U_x, så siden $g(x)$ per definisjon er infimum av U_x, får vi at $h(x) \leq g(x)$. Siden $x \in A$ var vilkårlig, slutter vi at $h \preceq g$. Siden dette gjelder for enhver nedre skranke h for U, slutter vi at $g = \inf U$.

d) Nei. Her kan vi for eksempel la $A = \{0, 1\}$ og $B = \mathbb{N}$ med sin naturlige ordning. Definer to funksjoner $f, g \in \mathbb{N}^A$ ved $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $g(0) = 1$ og $g(1) = 0$. Da gjelder hverken $f \preceq g$ eller $g \preceq f$.

e) Her kan vi bruke funksjonene f og g over. Sett $U = \{f, g\}$. Vi vet fra velordningsprinsippet, Teorem 3.2.6 i boka, eventuelt Proposisjon 5.23 i forelesningsnotatene, at enhver ikke-tom delmengde av $\mathbb{N}$ har et minste element. Men U kan ikke ha noe minste element, for vi har hverken $f \preceq g$ eller $g \preceq f$.

Oppgave 5 løsning

a) For $n = 0$ har vi at

$$k_0 = p_1(v_0) = p_1(0, x) = 0.$$

Dermed stemmer utsagnet for $n = 0$.
La nå $k \in \mathbb{N}$ og anta at $k_n = n$. Ved å bruke denne antagelsen samt den rekursive definisjonen av $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ får vi at

$$k_{s(n)} = p_1(v_{s(n)}) = p_1(\tilde{F}(v_n)) = p_1(\tilde{F}(k_n, u_n)) = p_1(s(k_n), F(k_n, u_n)) = s(k_n) = s(n).$$

Dermed stemmer utsagnet for $s(n)$. Siden $n \in \mathbb{N}$ var vilkårlig, slutter vi ved induksjon at utsagnet holder for alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Vi har at $u_0 = p_2(v_0) = p_2(0, x) = x$, og ved å bruke a) får vi for enhver $n \in \mathbb{N}$ at

$$u_{s(n)} = p_2(v_{s(n)}) = p_2(\tilde{F}(v_n)) = p_2(\tilde{F}(n, u_n)) = p_2(s(n), F(n, u_n)) = F(n, u_n).$$

c) La $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en følge i A som også tilfredsstiller $u'_0 = x$ og $u'_{s(n)} = F(n, u'_n)$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Vi viser ved induksjon at $u_n = u'_n$ for alle $n \in \mathbb{N}$.
For $n = 0$ får vi $u_0 = x = u'_0$, så grunnsteget stemmer. Anta så at $n \in \mathbb{N}$ og $u_n = u'_n$. Vi får da at

$$u_{s(n)} = F(n, u_n) = F(n, u'_n) = u'_{s(n)}.$$

Dermed har vi bevist induksjonssteget, som fullfører induksjonsbeviset.