Oppgaver uke 42

Oppgave 1

La $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Avgjør hvilke av følgende mengder som utgjør en partisjon av A:

a) $\mathcal{A}_1 = \{\{0, 1, 2, 3\}, \{4\}\}$.

b) $\mathcal{A}_2 = \{\{0\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \emptyset\}$.

c) $\mathcal{A}_3 = \{\{0, 1\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$.

d) $\mathcal{A}_4 = \{\{0, 1, 2\}, \{3, 4\}\}$.

e) $\mathcal{A}_5 = \{\{0, 2\}, \{1, 3\}\}$.

Oppgave 2

La A være en ikke-tom mengde og la $B \subseteq A$ være en delmengde slik at $B \neq \emptyset$ og $B \neq A$. Definer en relasjon $\sim$ på A ved at

$$\forall x, y \in A \quad \Big(x \sim y \quad \iff \quad (x \in B \Leftrightarrow y \in B) \Big).$$

a) Vis at $\sim$ er en ekvivalensrelasjon.

b) Beskriv partisjonen av A som $\sim$ induserer, altså kvotientmengden $A/\!\sim$.

c) Vis at indikatorfunksjonen $\chi_B \colon A \to \{0, 1\}$ bevarer $\sim$ i henhold til Definisjon 5.34 i forelesningsnotatene, der vi minner om at χ_B er gitt ved

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } x \in B, \\ 0 & \text{hvis } x \notin B. \end{cases}$$

Beskriv den induserte avbildningen $\overline{\chi_B} \colon A/\!\sim \to \{0, 1\}$.

Oppgave 3

La $f \colon A \to B$ være en funksjon. Definer en relasjon $\sim$ på A ved

$$\forall x, x' \in A \quad (x \sim x' \quad \iff \quad f(x) = f(x')).$$

a) Vis at $\sim$ er en ekvivalensrelasjon.

b) Vis at kvotientmengden tilhørende $\sim$ er gitt ved

$$A/\!\sim = \{f^{-1}[\{y\}] : y \in \mathrm{Im}(f)\}.$$

Oppgave 4

La A og B være mengder, og la $a \in A$. Gitt $y \in B$ så definerer vi en delmengde C_y av B^A (mengden av funksjoner fra A til B) som følger:

$$C_y = \{f \in B^A : f(a) = y\}.$$

Definer videre

$$\mathcal{A} = \{C_y : y \in B\}.$$

a) Vis at $\mathcal{A}$ er en partisjon av B^A.

b) Beskriv ekvivalensrelasjonen $\sim$ på B^A som $\mathcal{A}$ induserer.

c) Definer $\phi\colon B^A \to B$ ved $\phi(f) = f(a)$ for $f \in B^A$. Vis at ϕ respekterer $\sim$, og vis at den induserte avbildningen $\overline{\phi}\colon B^A/\!\sim \to B$ er en bijeksjon.

Oppgave 5

La $(A, \leq)$ være en ordnet mengde og la $B \subseteq A$. Vis at følgende er ekvivalent:

- B har et minimum.
- B har et infimum, og $\inf B \in B$.

Vis at dersom en av de to ekvivalente påstandene over holder, så må $\inf B = \min B$. (Dette er Proposisjon 5.23 i forelesningsnotatene.)

Oppgave 6 (nøtt)

Bruk velordningsprinsippet (Teorem 3.2.6 i læreboka, evt. Teorem 5.20 i forelesningsnotatene) til å vise at dersom en ikke-tom delmengde $A \subseteq \mathbb{N}$ er oppad begrenset, så har den et største element.

Løsning oppgave 1

Vi ser at $\mathcal{A}_1$ og $\mathcal{A}_4$ er partisjoner.
$\mathcal{A}_2$ er ikke en partisjon da $\emptyset \in \mathcal{A}_2$.
$\mathcal{A}_3$ er ikke en partisjon da $\{0,1\}$ og $\{1,2,3,4\}$ ikke er disjunkte.
$\mathcal{A}_5$ er ikke en partisjon da $4 \notin \{0,2\} \cup \{1,3\}$.

Løsning oppgave 2

a) Refleksivitet: Utsagnet $x \in B \Leftrightarrow x \in B$ er en tautologi, så $x \sim x$.
Symmetri: Dersom $x \sim y$, så får vi $x \in B \Leftrightarrow y \in B$, som er ekvivalent med $y \in B \Leftrightarrow x \in B$, altså $y \sim x$.
Transitivitet: Anta at $x \sim y$ og $y \sim z$. Dette gir $x \in B \Leftrightarrow y \in B$ og $y \in B \Leftrightarrow z \in B$. Til sammen gir disse $x \in B \Leftrightarrow z \in B$, altså $x \sim z$.

b) Dersom $x \in B$ så ser vi at $y \sim x$ hvis og bare hvis $y \in B$, så $[x] = B$. Dersom $x \notin B$, så ser vi at $y \sim x$ hvis og bare hvis $y \notin B$, så $[x] = A \setminus B$. Siden $\emptyset \subset B \subset A$, så har vi at $A/\sim = \{B, A \setminus B\}$.

c) Anta at $x, y \in A$ tilfredsstiller $x \sim y$. Vi får da at $x \in B \Leftrightarrow y \in B$, så $\chi_B(x) = 1 \Leftrightarrow \chi_B(y) = 1$. Vi konkluderer med at $\chi_B(x) = \chi_B(y)$. Dette viser at χ_B respekterer $\sim$.
Den induserte avbildningen er gitt ved $\overline{\chi_B}(B) = 1$ og $\overline{\chi_B}(A \setminus B) = 0$.

Løsning oppgave 3

a) Refleksivitet: La $x \in A$. Siden $f(x) = f(x)$, har vi at $x \sim x$.
Symmetri: La $x, y \in A$ og anta at $x \sim y$. Dette gir $f(x) = f(y)$. Dette gir $f(y) = f(x)$, altså $y \sim x$.
Transitivitet: La $x, y, z \in A$ og anta at $x \sim y$ og $y \sim z$. Dette gir $f(x) = f(y)$ og $f(y) = f(z)$. Da får vi $f(x) = f(z)$, så $x \sim z$.

b) Legg merke til at for $x \in A$ har vi at

$$[x] = \{x' \in A : f(x') = f(x)\} = f^{-1}[\{f(x)\}].$$

Dette viser at

$$A/\sim = \{f^{-1}[\{f(x)\}] : x \in A\} = \{f^{-1}[\{y\}] : y \in \mathrm{Im}(f)\}.$$

Løsning oppgave 4

a) Vi viser de tre egenskapene som en partisjon skal tilfredsstille.

(i) La $y \in B$. La $f\colon A \to B$ betegne funksjonen som er konstant lik y. Da gjelder spesielt $f(a) = y$, så $f \in C_y$. Dermed er $C_y \neq \emptyset$. Siden $y \in B$ var vilkårlig, kan vi slutte at $\emptyset \notin \mathcal{A}$.

(ii) La $y, y' \in B$ og anta at $C_y \cap C_{y'} \neq \emptyset$. Da fins en $f \in C_y \cap C_{y'}$, som da må tilfredsstille $f(a) = y$ og $f(a) = y'$. Dette gir $y = y'$, så $C_y = C_{y'}$.

(iii) La $f \in B^A$. Da er $f \in C_{f(a)}$. Dette viser at $\bigcup \mathcal{A} = B^A$.

b) La $f, g \in B^A$. Vi har at $f \sim g$ hvis og bare hvis det fins en $C \in \mathcal{A}$ slik at $f, g \in C$. Om vi skriver $C = C_y$ for en $y \in B$, får vi at $f(a) = y$ og $g(a) = y$. Oppsummert gir

dette at $f(a) = g(a)$. På den andre siden, dersom $f(a) = g(a)$, får vi umiddelbart at $f, g \in C_{f(a)}$. Vi har altså at

$$f \sim g \quad \iff \quad f(a) = g(a).$$

c) Anta at $f \sim g$. Fra b) gir dette at $f(a) = g(a)$. Dermed har vi at $\phi(f) = \phi(g)$, så ϕ respekterer $\sim$.
For å vise at $\overline{\phi}$ er en injeksjon, anta at $\overline{\phi}([f]) = \overline{\phi}([g])$. Dette gir $f(a) = g(a)$, så $f \sim g$. Dermed er $[f] = [g]$. Dette viser at $\overline{\phi}$ er injektiv.
For å se at $\overline{\phi}$ er surjektiv, la $y \in B$. Ved å velge funksjonen f til å være konstant lik y, får vi at $f(a) = y$, så $\phi(f) = y$. Dermed gjelder også $\overline{\phi}([f]) = y$.
a) La $u, v, w \in A^{\mathbb{N}}$, og la $n \in \mathbb{N}$. Ved å bruke assosiativiteten av $+$ på A får vi at

$$((u+v)+w)_n = (u+v)_n + w_n = ((u_n+v_n))+w_n = u_n+(v_n+w_n) = u_n+((v+w)_n) = (u+(v+w))_n.$$

Siden $n \in \mathbb{N}$ var vilkårlig, konkluderer vi med at

$$(u + v) + w = u + (v + w).$$

Dette viser at $+$ på $A^{\mathbb{N}}$ er assosiativ.
Videre ser vi at for hver $n \in \mathbb{N}$ får vi at

$$(u + \mathbf{0})_n = u_n + \mathbf{0}_n = u_n + 0 = u_n = 0 + u_n = \mathbf{0}_n + u_n = (\mathbf{0} + u)_n.$$

Dette viser at $u + \mathbf{0} = u = \mathbf{0} + u$, altså er $\mathbf{0}$ et nøytralt element for $+$ på $A^{\mathbb{N}}$.

b) Refleksivitet: La $u \in A^{\mathbb{N}}$. Siden $u_n = u_n$ for alle $n \in \mathbb{N}$, har vi at $u \sim u$ (her kan vi velge $N = 0$).
Symmetri: La $u, v \in A^{\mathbb{N}}$ og anta at $u \sim v$. Da fins det en $N \in \mathbb{N}$ slik at $n \geq N$ impliserer $u_n = v_n$. Snur vi om på denne likheten, får vi $v_n = u_n$, også for alle $n \geq N$. Vi konkluderer med at $v \sim u$.
Transitivitet: La $u, v, w \in A^{\mathbb{N}}$ og anta at $u \sim v$ og $v \sim w$. Det fins da en $N \in \mathbb{N}$ slik at $n \geq N$ impliserer $u_n = v_n$, og en $M \in \mathbb{N}$ slik at $n \geq M$ impliserer $v_n = w_n$. Sett $K = \max\{N, M\}$ (maksimum vet vi fins siden ordningen på $\mathbb{N}$ er total). Dersom $n \geq K$ må da både $n \geq N$ og $n \geq M$ gjelde, så vi kan konkludere med at både $u_n = v_n$ og $v_n = w_n$. Men da gjelder også $u_n = w_n$. Dette viser at $u \sim w$.

c) Anta at $u \sim u'$ og $v \sim v'$. Da fins $N \in \mathbb{N}$ slik at $n \geq N$ impliserer $u_n = u'_n$ og det fins $M \in \mathbb{N}$ slik at $n \geq M$ impliserer $v_n = v'_n$. Igjen, dersom $n \geq K = \max\{N, K\}$, får vi både at $u_n = u'_n$ og $v_n = v'_n$, så

$$(u + v)_n = u_n + v_n = u'_n + v'_n = (u' + v')_n.$$

Dette viser at $u + v \sim u' + v'$. Dermed er binæroperasjonen på $A/\sim$ veldefinert.

Løsning oppgave 5

La $(A, \leq)$ være en ordnet mengde og la $B \subseteq A$.

Anta først at B har et minimum, som vi betegner med $\min B$. Siden $\min B \leq b$ for alle $b \in B$, er da $\min B$ en nedre skranke for B. Videre, dersom x er en nedre skranke for B, så får vi at $x \leq b$ for alle $b \in B$. Spesielt, siden $\min B \in B$, får vi at $x \leq \min B$. Dermed er $\min B$ størst blant alle nedre skranker. Vi konkluderer med at B har et infimum, nemlig $\min B$, så $\min B = \inf B$.

I den andre retningen, anta at B har et infimum, og at $\inf B \in B$. Siden $\inf B$ er en nedre skranke for B, får vi at $\inf B \leq b$ for alle $b \in B$. Siden $\inf B \in B$, får vi per definisjon at $\inf B = \min B$.

Løsning oppgave 6

La $A \subseteq \mathbb{N}$ være en ikke-tom, oppad begrenset mengde. La B betegne mengden av øvre skranker. Per antagelse er B da ikke-tom, så ved velordningsprinsippet har B et minste element. Dette elementet er da per definisjon supremum av A, så vi har spesielt at $a \leq \sup A$ for alle $a \in A$.
For å vise at A har et maksimum, må vi vise at $\sup A \in A$ ved Proposisjon 5.23. Anta for en selvmotsigelse at $\sup A \notin A$. Vi får da at $a < \sup A$ for alle $a \in A$, så $a + 1 \leq \sup A$ for alle $a \in A$ ved Proposisjon 5.11 (iv). Siden $1 \leq a + 1$, gir transitivitet at $1 \leq \sup A$. Da er $\sup A \neq 0$, så det fins $x \in \mathbb{N}$ slik at $s(x) = x + 1 = \sup A$. Men da gir Proposisjon 5.11 (ii) at $a \leq x$ for alle $a \in A$. Dermed er x en øvre skranke for A, som gir $\sup A \leq x$, altså $x + 1 \leq x$, en selvmotsigelse. Dette fullfører beviset.