

Oppgaver uke 42

Oppgave 1

La $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Avgjør hvilke av følgende mengder som utgjør en partisjon av A :

- a) $\mathcal{A}_1 = \{\{0, 1, 2, 3\}, \{4\}\}$.
- b) $\mathcal{A}_2 = \{\{0\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \emptyset\}$.
- c) $\mathcal{A}_3 = \{\{0, 1\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$.
- d) $\mathcal{A}_4 = \{\{0, 1, 2\}, \{3, 4\}\}$.
- e) $\mathcal{A}_5 = \{\{0, 2\}, \{1, 3\}\}$.

Oppgave 2

La A være en ikke-tom mengde og la $B \subseteq A$ være en delmengde slik at $B \neq \emptyset$ og $B \neq A$. Definer en relasjon $\sim$ på A ved at

$$\forall x, y \in A \quad (x \sim y \iff (x \in B \Leftrightarrow y \in B)).$$

- a) Vis at $\sim$ er en ekvivalensrelasjon.
- b) Beskriv partisjonen av A som $\sim$ induserer, altså kvotientmengden $A/\sim$.
- c) Vis at indikatorfunksjonen $\chi_B: A \rightarrow \{0, 1\}$ bevarer $\sim$ i henhold til Definisjon 5.34 i forelesningsnotatene, der vi minner om at χ_B er gitt ved

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } x \in B, \\ 0 & \text{hvis } x \notin B. \end{cases}$$

Beskriv den induserte avbildningen $\overline{\chi_B}: A/\sim \rightarrow \{0, 1\}$.

Oppgave 3

La $f: A \rightarrow B$ være en funksjon. Definer en relasjon $\sim$ på A ved

$$\forall x, x' \in A \quad (x \sim x' \iff f(x) = f(x')).$$

- a) Vis at $\sim$ er en ekvivalensrelasjon.
- b) Vis at kvotientmengden tilhørende $\sim$ er gitt ved

$$A/\sim = \{f^{-1}[\{y\}] : y \in \text{Im}(f)\}.$$

Oppgave 4

La A og B være mengder, og la $a \in A$. Gitt $y \in B$ så definerer vi en delmengde C_y av B^A (mengden av funksjoner fra A til B) som følger:

$$C_y = \{f \in B^A : f(a) = y\}.$$

Definer videre

$$\mathcal{A} = \{C_y : y \in B\}.$$

- a) Vis at $\mathcal{A}$ er en partisjon av B^A .
- b) Beskriv ekvivalensrelasjonen $\sim$ på B^A som $\mathcal{A}$ induserer.
- c) Definer $\phi: B^A \rightarrow B$ ved $\phi(f) = f(a)$ for $f \in B^A$. Vis at ϕ respekterer $\sim$, og vis at den induserte avbildningen $\bar{\phi}: B^A/\sim \rightarrow B$ er en bijeksjon.

Oppgave 5

La $(A, \leq)$ være en ordnet mengde og la $B \subseteq A$. Vis at følgende er ekvivalent:

- B har et minimum.
- B har et infimum, og $\inf B \in B$.

Vis at dersom en av de to ekvivalente påstandene over holder, så må $\inf B = \min B$. (Dette er Proposisjon 5.23 i forelesningsnotatene.)

Oppgave 6 (nøtt)

Bruk velordningsprinsippet (Teorem 3.2.6 i læreboka, evt. Teorem 5.20 i forelesningsnotatene) til å vise at dersom en ikke-tom delmengde $A \subseteq \mathbb{N}$ er oppad begrenset, så har den et største element.