Oppgaver uke 43

Oppgave 1

Disse oppgavene involverer å sjekke visse ting relatert til konstruksjonen av heltallene presentert i forelesningene.

a) Vi minner om ekvivalensrelasjonen $\sim$ på $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ gitt ved

$$(a_1, a_2) \sim (a_1', a_2') \quad \iff \quad a_1 + a_2' = a_1' + a_2.$$

Vis at binæroperasjonen på $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ gitt ved

$$(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = (a_1 b_1 + a_2 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

bevarer $\sim$.

Hint: Sjekk først at dersom $(a_1, a_2) \sim (a_1', a_2')$, så er

$$(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) \sim (a_1', a_2') \cdot (b_1, b_2).$$

Vis deretter at binæroperasjonen $\cdot$ på $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ er kommutativ, slik at vi kan bruke identiteten over til å behandle $(b_1, b_2) \sim (b_1', b_2')$ i tillegg.

b) Sjekk at $\cdot$ er distributiv over $+$ på $\mathbb{Z}$.

Hint: Her er det nok greiest å la $a = a_1 - a_2$, $b = b_1 - b_2$ og $c = c_1 - c_2$, og regne ut $a(b + c)$ og $ab + ac$ hver for seg og sjekke at de stemmer overens.

c) Sjekk at egenskapen

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} \quad \big(ab = 0 \implies (a = 0 \ \vee \ b = 0)\big)$$

holder for konstruksjonen vår av $\mathbb{Z}$ i forelesningen, slik at $\mathbb{Z}$ er et integritetsområde.

Hint: La $a = a_1 - a_2$ og $b = b_1 - b_2$ der $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{N}$, og anta at

$$ab = (a_1 b_1 + a_2 b_2) - (a_1 b_2 + a_2 b_1) = 0.$$

Del inn i tre tilfeller: $a_1 = a_2$, $a_1 > a_2$ og $a_1 < a_2$, og bruk definisjonen av ordningen på de naturlige tallene til å utlede at $b_1 = b_2$ i de to siste tilfellene.

Oppgave 2

Disse oppgavene omhandler konstruksjonen vår av de rasjonale tallene.

a) Vi minner om ekvivalensrelasjonen $\sim$ på $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ gitt ved

$$(a, b) \sim (a', b') \quad \iff \quad ab' = a'b.$$

Vis at følgende definerer en binæroperasjon på $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ som bevarer $\sim$:

$$(a, b) + (c, d) = (ad + bc, bd).$$

b) Vis at den induserte operasjonen + på $\mathbb{Q} = (\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}))/\sim$ er kommutativ, og at $0/1$ er et nøytralt element.

c) Vis at ethvert element i $\mathbb{Q}$ har en additiv invers.

d) Vis at funksjonen $i\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ gitt ved $i(a) = a/1$ tilfredsstiller $i(a+b) = i(a)+i(b)$, $i(ab) = i(a)i(b)$ for alle $a, b \in \mathbb{Z}$.

Oppgave 3

Som definert i forelesning (se også seksjon 6.3 i læreboka) så er en *totalt ordnet ring* er et sekstuppel $(A, +, \cdot, 0, 1, \leq)$ der følgende holder:

(i) $(A, +, \cdot, 0, 1)$ er en kommutativ ring.

(ii) $(A, \leq)$ er en totalt ordnet mengde.

(iii) For alle $a, b, c \in A$ har vi følgende:

$$\begin{aligned} a \leq b &\implies a + c \leq b + c, \\ a \geq 0 \ \wedge \ b \geq 0 &\implies ab \geq 0. \end{aligned}$$

I denne oppgaven skal du vise egenskapene (iv) og (v) fra Proposisjon 5.53, altså følgende for alle $a, b, c \in A$:

a) Dersom $c \geq 0$ har vi at

$$a \leq b \implies ac \leq bc.$$

Dersom vi er i et integritetsområde og $c > 0$, gjelder også motsatt implikasjon.

b) Dersom $c \leq 0$ har vi at

$$a \leq b \implies ac \geq bc.$$

Dersom vi er i et integritetsområde og $c < 0$, gjelder også motsatt implikasjon.

Hint: Du kommer til å trenge (i), (ii) og (iii) fra Proposisjon 5.53.

Oppgave 4

La $(A, +, \cdot)$ være en kommutativ ring. En *ikke-negativ kjegle* er en mengde $P \subseteq A$ med følgende egenskaper (under så betegner $-P = \{-a : a \in P\}$):

(i) For alle $a, b \in P$ så gjelder $a + b \in P$ og $ab \in P$.

(ii) $P \cap (-P) = \{0\}$.

(iii) $P \cup (-P) = A$.

Gitt en ikke-negativ kjegle P, så definerer vi en relasjon $\leq_P$ på A ved

$$\forall a, b \in A: \quad a \leq_P b \iff b - a \in P.$$

a) Vis at med $\leq_P$ som definert over, så blir $(A, +, \cdot, 0, 1, \leq_P)$ en totalt ordnet ring.

b) I den andre retningen, la oss si at vi starter med en totalt ordnet ring $(A, +, \cdot, 0, 1, \leq$). Definer

$$P_{\leq} = \{a \in A : 0 \leq a\}.$$

Vis at $P_{\leq}$ er en ikke-negativ kjegle.

c) Vis at disse to korrespondansene er inverse av hverandre, altså at om vi starter med en ikke-negativ kjegle P for $(A, +, \cdot, 0, 1)$ så er $P_{\leq_P} = P$, og om vi starter med en ordensrelasjon på A slik at $(A, +, \cdot, 0, 1 \leq)$ er en totalt ordnet ring, så er $\leq_{P_{\leq}} = \leq$.

Oppgave 5

Vis at

$$\mathbb{Q}_{\geq 0} = \{a/b : a, b \in \mathbb{Z},\, b \neq 0,\, ab \geq 0\}$$

er en ikke-negativ kjegle i $\mathbb{Q}$. Dermed gir Proposisjon 5.56 i forelesningsnotatene en ordensrelasjon på $\mathbb{Q}$ som gjør at $(\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1, \leq)$ blir en totalt ordnet ring.
Her kan det være nyttig å først etablere at $a/b \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ hvis og bare hvis $ab \geq 0$. Dette følger subtilt nok ikke umiddelbart fra definisjonen av $\mathbb{Q}_{\geq 0}$!

Oppgave 1 løsning

a) Vi følger hintet: La $(a_1, a_2), (a_1', a_2'), (b_1, b_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ og anta at $(a_1, a_2) \sim (a_1', a_2')$ slik at $a_1 + a_2' = a_1' + a_2$. Dette gir

$$\begin{aligned}(a_1b_1 + a_2b_2) + (a_1'b_2 + a_2'b_1) &= (a_1 + a_2')b_1 + (a_1' + a_2)b_2 \\ &= (a_1' + a_2)b_1 + (a_1 + a_2')b_2 \\ &= (a_1'b_1 + a_2'b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1).\end{aligned}$$

Men dette innebærer at $(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) \sim (a_1', a_2') \cdot (b_1, b_2)$.

Deretter ser vi at

$$(a_1, a_2)\cdot(b_1, b_2) = (a_1b_1+a_2b_2, a_1b_2+a_2b_1) = (b_1a_1+b_2a_2, b_1a_2+b_2a_1) = (b_1, b_2)\cdot(a_1, a_2).$$

Dersom $(b_1, b_2) \sim (b_1', b_2')$, får vi da, ved å bruke det vi allerede har vist, at

$$\begin{aligned}(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) &\sim (a_1', a_2') \cdot (b_1, b_2) \\ &= (b_1, b_2) \cdot (a_1', a_2') \\ &\sim (b_1', b_2') \cdot (a_1', a_2') \\ &= (a_1', a_2') \cdot (b_1', b_2').\end{aligned}$$

Dermed har vi vist at $\cdot$ bevarer $\sim$.

b) La $a = a_1 - a_2$, $b = b_1 - b_2$ og $c = c_1 - c_2$ der $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{N}$. Vi regner først ut $a(b + c)$:

$$\begin{aligned}a(b + c) &= (a_1 - a_2)((b_1 + c_1) - (b_2 + c_2)) \\ &= (a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2)) - (a_1(b_2 + c_2) + a_2(b_1 + c_1)) \\ &= (a_1b_1 + a_1c_1 + a_2b_2 + a_2c_2) - (a_1b_2 + a_1c_2 + a_2b_1 + a_2c_1).\end{aligned}$$

Deretter regner vi ut $ac + bc$:

$$\begin{aligned}ab + ac &= ((a_1b_1 + a_2b_2) - (a_1b_2 + a_2b_1)) + ((a_1c_1 + a_2c_2) - (a_1c_2 + a_2c_1)) \\ &= (a_1b_1 + a_2b_2 + a_1c_1 + a_2c_2) - (a_1b_2 + a_2b_1 + a_1c_2 + a_2c_1).\end{aligned}$$

Vi ser ved inspeksjon at resultatene stemmer overens.

c) Vi lar $a = a_1 - a_2$ og $b = b_1 - b_2$ være heltall der $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{N}$, og antar at $ab = 0$, dvs.

$$(a_1b_1 + a_2b_2) - (a_1b_2 + a_2b_1) = 0.$$

Dette kan skrives om til

$$a_1b_1 + a_2b_2 = a_1b_2 + a_2b_1.$$

Vi deler inn i de tre tilfellene i hintet. Dersom $a_1 = a_2$, har vi $a = 0$, som spesielt gir ønsket konklusjon $a = 0 \ \vee \ b = 0$. Dersom $a_1 > a_2$, fins en $c \in \mathbb{N}$, $c \neq 0$, slik at $a_1 = a_2 + c$. Setter vi inn i ligningen over, får vi

$$a_2b_1 + cb_1 + a_2b_2 = a_2b_2 + cb_2 + a_2b_1.$$

Her kan vi kansellere a_2b_1 og a_2b_2 på begge sider, og da sitter vi igjen med $cb_1 = cb_2$. Siden $c \neq 0$, gir multiplikativ kansellasjon at $b_1 = b_2$, altså $b = 0$.

Dersom $a_1 < a_2$, fins en $d \in \mathbb{N}$, $d \neq 0$, slik at $a_1 + d = a_2$. Setter vi igjen inn i ligningen, får vi

$$a_1b_1 + a_1b_2 + db_2 = a_1b_2 + a_1b_1 + db_1.$$

Vi kansellerer a_1b_1 og a_1b_2 på begge sider og sitter igjen med $db_2 = db_1$. Siden $d \neq 0$, konkluderer vi med at $b_1 = b_2$, altså $b = 0$.

Oppgave 2 løsning

a) Merk først at vi må sjekke at dersom $(a,b),(c,d) \in \mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}\setminus\{0\})$, så er $(a,b)+(c,d) \in \mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}\setminus\{0\})$. Dette stemmer, fordi dersom $b,d \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, så er $bd \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ fra det faktum at $\mathbb{Z}$ er et integritetsområde.

La oss nå sjekke at addisjon bevarer $\sim$. Anta at $(a,b)\sim(a',b')$ og $(c,d)\sim(c',d')$. Vi får da at $ab' = a'b$ og $cd' = c'd$. Vi ønsker å vise at $(ad+bc,bd)\sim(a'd'+b'c',b'd')$, altså at

$$(ad+bc)(b'd') = (a'd'+b'c')bd.$$

Men bruker vi antagelsen vår, får vi at

$$(ad+bc)(b'd') = (ab')(dd')+(bb')(cd') = (a'b)(dd')+(bb')(c'd) = (a'd'+b'c')(bd).$$

Dette er nøyaktig hva vi ønsket å vise.

b) Ved å bruke at addisjon og multiplikasjon på $\mathbb{Z}$ er kommutative operasjoner, får vi for alle $a/b, c/d \in \mathbb{Q}$ at

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} = \frac{cb+da}{db} = \frac{c}{d}+\frac{a}{b}.$$

Vi ser også at

$$\frac{a}{b}+\frac{0}{1} = \frac{a\cdot 1+b\cdot 0}{b\cdot 1} = \frac{a}{b}.$$

Dette viser at $0/1$ er et nøytralt element for addisjon (vi trenger ikke vise addisjonen i motsatt rekkefølge siden $+$ allerede er etablert å være kommutativ).

c) La $a/b \in \mathbb{Q}$. Vi ser da at

$$\frac{a}{b}+\frac{-a}{b} = \frac{ab+(-a)b}{bb} = \frac{ab-ab}{bb} = \frac{0}{bb} = \frac{0}{1},$$

hvor vi merker oss at $0/c = 0/1$ for enhver $c \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ siden $0\cdot 1 = c\cdot 0$.

d) La $a,b \in \mathbb{Z}$. Vi får

$$i(a)+i(b) = \frac{a}{1}+\frac{b}{1} = \frac{a\cdot 1+1\cdot b}{1\cdot 1} = \frac{a+b}{1} = i(a+b)$$

og

$$i(a)i(b) = \frac{a}{1}\cdot\frac{b}{1} = \frac{ab}{1\cdot 1} = \frac{ab}{1} = i(ab).$$

Oppgave 3 løsning

a) At $a \le b$ gir at $b-a \ge 0$. Da gir aksiom (iii) at $(b-a)c \ge 0$, siden vi antar at $c \ge 0$. Dette kan skrives om til $ac \le bc$.

Dersom A er et integritetsområde og $c > 0$, gir $(b-a)c \ge 0$ og Proposisjon 5.54 (ii) at enten $b-a \ge 0$ og $c \ge 0$ eller $b-a \le 0$ og $c \le 0$. Siden vi antar at $c > 0$ er kun det første tilfellet en mulighet. Dermed får vi $b-a \ge 0$, altså $a \le b$ som ønsket.

b) Igjen kan vi skrive om $a \le b$ til $b-a \ge 0$. Denne gangen er $c \le 0$, så Proposisjon 5.54 (ii) gir at $(b-a)c \le 0$. Dette gir igjen $ac \ge bc$. Dersom A er et integritetsområde og $c < 0$, gir Proposisjon 5.54 (ii) og $(b-a)c \le 0$ at enten $b-a \le 0$ og $c \ge 0$, eller $b-a \ge 0$ og $c \le 0$. Siden vi antar $c < 0$, er kun siste tilfelle en mulighet. Vi konkluderer derfor med at $b-a \ge 0$, altså at $a \le b$.

Oppgave 4 løsning

a) Vi viser først at $\leq_P$ er en total orden. Fra (ii) får vi at $0 \in P$, og siden $a-a = 0 \in P$, får vi at $a \leq_P a$ for enhver $a \in A$. Videre, dersom $a \leq_P b$ og $b \leq_P a$, så gir dette både $b - a \in P$ og $a - b \in P$. Siden $a - b = -(b - a)$, har vi da at $b - a \in P \cap (-P) = \{0\}$ ved (ii), så $a = b$. Til slutt, dersom $a \leq_P b$ og $b \leq_P c$, fås $b - a \in P$ og $c - b \in P$. Da gir (i) at

$$c - a = (c - b) + (b - a) \in P.$$

Dette gir $a \leq_P c$. Vi har dermed vist at $\leq_P$ er en ordensrelasjon på A.

For å vise at $\leq_P$ er total, la $a, b \in A$. Ved (iii) har vi at $b - a \in P \cup (-P)$. Dersom $b - a \in P$, har vi at $a \leq_P b$. Dersom $b - a \in (-P)$, har vi at $-(b - a) \in P$, altså $a - b \in P$, så $a \leq_P b$. Dette viser at $\leq_P$ er total.

Vi viser nå de ekstra aksiomene for en totalt ordnet ring. Dersom $a, b \in A$ og $a \leq_P b$, får vi $b - a \in P$. Siden $b - a = (b + c) - (a + c)$, ligger sistnevnte også i P, som umiddelbart gir $a + c \leq_P b + c$. Dersom $a \geq_P 0$ og $b \geq_P 0$, altså $a, b \in P$, så gir (i) at $ab \in P$, altså $ab \geq_P 0$.

b) Vi sjekker de tre egenskapene en ikke-negativ kjegle skal tilfredsstille:

(i) La $a, b \in P_{\leq}$. Da er $0 \leq a$ og $0 \leq b$. Legger vi til b på hver side av ulikheten $0 \leq a$, får vi at $b = 0 + b \leq a + b$. Siden $0 \leq b$ per antagelse, gir transitivitet av $\leq$ at $0 \leq a + b$. Dermed er $a + b \in P_{\leq}$. I tillegg gir antagelsen i Oppgave 3 (iii) på $\leq$ at dersom $0 \leq a$ og $0 \leq b$, så er $0 \leq ab$. Dette oversettes til at $a, b \in P_{\leq}$ impliserer $ab \in P_{\leq}$.

(ii) La $a \in P_{\leq} \cap (-P_{\leq})$. Da får vi at $a \geq 0$ og $a = -b$ der $b \geq 0$. Da gir (a) fra Oppgave 3 at $a \leq 0$. Nå gir antisymmetrien til $\leq$ at $a = 0$. Dermed har vi vist at $P_{\leq} \cap (-P_{\leq}) = \{0\}$.

(iii) La $a \in A$. Siden $\leq$ er total, har vi enten at $a \geq 0$ eller $a \leq 0$. Sistnevnte er ekvivalent med $-a \geq 0$. Altså har vi at $a \in P_{\leq}$ eller $a \in (-P_{\leq})$. Dette gir $A = P_{\leq} \cup (-P_{\leq})$.

c) Anta først at vi starter med en ikke-negativ kjegle $P \subseteq A$. For $a \in A$ har vi da at

$$a \in P_{\leq_P} \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq_P a \quad \Leftrightarrow \quad a = a - 0 \in P.$$

Dette viser at $P_{\leq_P} = P$.

Anta så at vi starter med en ordningsrelasjon $\leq$ på A som gir en totalt ordnet ring. For $a, b \in A$ har vi da at

$$a \leq_{P_{\leq}} b \quad \Leftrightarrow \quad b - a \in P_{\leq} \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq b - a \quad \Leftrightarrow \quad a \leq b.$$

Dette viser at $\leq_{P_{\leq}} = \leq$.

Oppgave 5 løsning

La $a, b \in \mathbb{Z}$ med $b \neq 0$. Vi viser først at $a/b \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ hvis og bare hvis $ab \geq 0$. Dersom $ab \geq 0$, får vi at $a/b \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$, men det er den motsatte implikasjonen som er litt mer subtil. Anta nemlig at $a/b \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$. Per definisjon betyr dette at det fins $a', b' \in \mathbb{Z}$ der $b' \neq 0$ og $a'b' \geq 0$, slik at $a/b = a'/b'$. Dette gir at $ab' = a'b$. Ganger vi på hver side med bb', får vi at $(ab')(bb') = (a'b)(bb')$. Dette kan skrives som

$$(ab)(b')^2 = (a'b')(b)^2.$$

Siden $a'b' \geq 0$ og $b^2 > 0$, får vi at $(a'b')(b^2) \geq 0$, altså $(ab)(b')^2 \geq 0$ (her bruker vi at $\mathbb{Z}$ er et integritetsområde og Oppgave 3). Men siden $(b')^2 \geq 0$, er nå eneste mulighet at $ab \geq 0$. Dermed har vi vist den ønskede ekvivalensen.
Vi viser nå at $\mathbb{Q}_{\geq 0}$ er en ikke-negativ kjegle. La først $a/b, c/d \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$. Da er $ab \geq 0$ og $cd \geq 0$, så

$$(ad + bc)(bd) = (ab)d^2 + (cd)b^2 \geq 0.$$

Dette viser at $a/b + c/d \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$. Videre er

$$(ac)(bd) = (ab)(cd) \geq 0.$$

Dette viser at $(a/b) \cdot (c/d) \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$.
Til slutt merker vi oss at $-\mathbb{Q}_{\geq 0} = \{a/b : a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0,\ ab \leq 0\}$. Siden et vilkårlig tall $a/b \in \mathbb{Q}$ tilfredsstiller enten $ab \geq 0$ eller $ab \leq 0$, får vi at $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_{\geq 0} \cup (-\mathbb{Q}_{\geq 0})$. Og dersom $a/b \in \mathbb{Q}_{\geq 0} \cap (-\mathbb{Q}_{\geq 0})$, får vi at $ab \geq 0$ og $ab \leq 0$, som gir $ab = 0$ og dermed enten $a = 0$ eller $b = 0$. Siden $b \neq 0$ per definisjon, får vi at $a = 0$, altså er $a/b = 0$.