Oppgaver uke 43

Oppgave 1

Disse oppgavene involverer å sjekke visse ting relatert til konstruksjonen av heltallene presentert i forelesningene.

a) Vi minner om ekvivalensrelasjonen $\sim$ på $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ gitt ved

$$(a_1, a_2) \sim (a_1', a_2') \quad \iff \quad a_1 + a_2' = a_1' + a_2.$$

Vis at binæroperasjonen på $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ gitt ved

$$(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = (a_1 b_1 + a_2 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

bevarer $\sim$.

Hint: Sjekk først at dersom $(a_1, a_2) \sim (a_1', a_2')$, så er

$$(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) \sim (a_1', a_2') \cdot (b_1, b_2).$$

Vis deretter at binæroperasjonen $\cdot$ på $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ er kommutativ, slik at vi kan bruke identiteten over til å behandle $(b_1, b_2) \sim (b_1', b_2')$ i tillegg.

b) Sjekk at $\cdot$ er distributiv over $+$ på $\mathbb{Z}$.

Hint: Her er det nok greiest å la $a = a_1 - a_2$, $b = b_1 - b_2$ og $c = c_1 - c_2$, og regne ut $a(b + c)$ og $ab + ac$ hver for seg og sjekke at de stemmer overens.

c) Sjekk at egenskapen

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} \quad \big(ab = 0 \implies (a = 0 \ \vee \ b = 0)\big)$$

holder for konstruksjonen vår av $\mathbb{Z}$ i forelesningen, slik at $\mathbb{Z}$ er et integritetsområde.

Hint: La $a = a_1 - a_2$ og $b = b_1 - b_2$ der $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{N}$, og anta at

$$ab = (a_1 b_1 + a_2 b_2) - (a_1 b_2 + a_2 b_1) = 0.$$

Del inn i tre tilfeller: $a_1 = a_2$, $a_1 > a_2$ og $a_1 < a_2$, og bruk definisjonen av ordningen på de naturlige tallene til å utlede at $b_1 = b_2$ i de to siste tilfellene.

Oppgave 2

Disse oppgavene omhandler konstruksjonen vår av de rasjonale tallene.

a) Vi minner om ekvivalensrelasjonen $\sim$ på $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ gitt ved

$$(a, b) \sim (a', b') \quad \iff \quad ab' = a'b.$$

Vis at følgende definerer en binæroperasjon på $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ som bevarer $\sim$:

$$(a, b) + (c, d) = (ad + bc, bd).$$

b) Vis at den induserte operasjonen + på $\mathbb{Q} = (\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}))/\sim$ er kommutativ, og at $0/1$ er et nøytralt element.

c) Vis at ethvert element i $\mathbb{Q}$ har en additiv invers.

d) Vis at funksjonen $i\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ gitt ved $i(a) = a/1$ tilfredsstiller $i(a+b) = i(a)+i(b)$, $i(ab) = i(a)i(b)$ for alle $a, b \in \mathbb{Z}$.

Oppgave 3

Som definert i forelesning (se også seksjon 6.3 i læreboka) så er en *totalt ordnet ring* er et sekstuppel $(A, +, \cdot, 0, 1, \leq)$ der følgende holder:

(i) $(A, +, \cdot, 0, 1)$ er en kommutativ ring.

(ii) $(A, \leq)$ er en totalt ordnet mengde.

(iii) For alle $a, b, c \in A$ har vi følgende:

$$\begin{aligned} a \leq b &\implies a + c \leq b + c, \\ a \geq 0 \ \wedge \ b \geq 0 &\implies ab \geq 0. \end{aligned}$$

I denne oppgaven skal du vise egenskapene (iv) og (v) fra Proposisjon 5.53, altså følgende for alle $a, b, c \in A$:

a) Dersom $c \geq 0$ har vi at

$$a \leq b \implies ac \leq bc.$$

Dersom vi er i et integritetsområde og $c > 0$, gjelder også motsatt implikasjon.

b) Dersom $c \leq 0$ har vi at

$$a \leq b \implies ac \geq bc.$$

Dersom vi er i et integritetsområde og $c < 0$, gjelder også motsatt implikasjon.

Hint: Du kommer til å trenge (i), (ii) og (iii) fra Proposisjon 5.53.

Oppgave 4

La $(A, +, \cdot)$ være en kommutativ ring. En *ikke-negativ kjegle* er en mengde $P \subseteq A$ med følgende egenskaper (under så betegner $-P = \{-a : a \in P\}$):

(i) For alle $a, b \in P$ så gjelder $a + b \in P$ og $ab \in P$.

(ii) $P \cap (-P) = \{0\}$.

(iii) $P \cup (-P) = A$.

Gitt en ikke-negativ kjegle P, så definerer vi en relasjon $\leq_P$ på A ved

$$\forall a, b \in A: \quad a \leq_P b \iff b - a \in P.$$

a) Vis at med $\leq_P$ som definert over, så blir $(A, +, \cdot, 0, 1, \leq_P)$ en totalt ordnet ring.

b) I den andre retningen, la oss si at vi starter med en totalt ordnet ring $(A, +, \cdot, 0, 1, \leq$). Definer

$$P_{\leq} = \{a \in A : 0 \leq a\}.$$

Vis at $P_{\leq}$ er en ikke-negativ kjegle.

c) Vis at disse to korrespondansene er inverse av hverandre, altså at om vi starter med en ikke-negativ kjegle P for $(A, +, \cdot, 0, 1)$ så er $P_{\leq_P} = P$, og om vi starter med en ordensrelasjon på A slik at $(A, +, \cdot, 0, 1 \leq)$ er en totalt ordnet ring, så er $\leq_{P_{\leq}} = \leq$.

Oppgave 5

Vis at

$$\mathbb{Q}_{\geq 0} = \{a/b : a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0,\ ab \geq 0\}$$

er en ikke-negativ kjegle i $\mathbb{Q}$. Dermed gir Proposisjon 5.56 i forelesningsnotatene en ordensrelasjon på $\mathbb{Q}$ som gjør at $(\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1, \leq)$ blir en totalt ordnet ring.
Her kan det være nyttig å først etablere at $a/b \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ hvis og bare hvis $ab \geq 0$. Dette følger subtilt nok ikke umiddelbart fra definisjonen av $\mathbb{Q}_{\geq 0}$!