Oppgaver uke 44

Oppgave 1

Regn ut største felles divisor d for a og b, og skriv d som en lineærkombinasjon av a og b med heltallskoeffisienter, i følgende tilfeller:

a) $a = 18$, $b = 48$.

b) $a = 252$, $b = 105$.

c) $a = 123$, $b = 76$.

Oppgave 2

Avgjør hvilke av følgende utsagn som generelt er sanne for alle $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Gi bevis dersom sant, og moteksempel dersom ikke sant.

a) $a \mid b \implies a^2 \mid b^2$.

b) $a \mid c \ \wedge \ b \mid c \implies ab \mid c$.

c) $a \mid b \implies ac \mid bc$.

d) $a \mid 1 \implies a = 1$.

e) $2 \mid a^2 \implies 2 \mid a$.

Oppgave 3

I forelesningen beviste vi at det ikke fins et rasjonalt tall q slik at $q^2 = 2$. Bruk en lignende taktikk til å vise følgende:

a) Vis at det ikke fins et rasjonalt tall q slik at $q^2 = 3$.

b) Vis at det ikke fins et rasjonalt tall q slik at $q^3 - q - 1 = 0$.

Oppgave 4

La $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Vis at dersom $a \mid c$, $b \mid c$ og $a \wedge b = 1$, så vil $ab \mid c$. (Hint: Bruk Euklids lemma.)

Oppgave 5

Vis at alle kvadratttall, dvs. alle tall på formen n^2 der $n \in \mathbb{N}$, er på formen $4k$ eller $4k + 1$ for et heltall $k \in \mathbb{N}$.
Hint: Bruk at n enten er et partall eller et oddetall.

Oppgave 6

La $(F, +, \cdot, 0, 1)$ være en kropp. I denne oppgaven er målet å gi mening til potenser x^a der $x \in F \setminus \{0\}$ og $a \in \mathbb{Z}$. Spesielt lar dette oss definere x^a når x er et rasjonalt tall. Videre skal vi bevise identiteter for disse potensene.

Vi begynner med tilfellet der $n \in \mathbb{N}$. Da definerer vi x^n for $x \in F \setminus \{0\}$ ved rekursjon på samme måte som i uke 40:

$$\begin{aligned} q^0 &= 1, \\ q^{n+1} &= q \cdot q^n, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

a) Vis at følgende identiteter holder for alle $x, y \in F$ og $m, n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} (xy)^n &= x^n y^n, \\ x^{m+n} &= x^m x^n, \\ (x^m)^n &= x^{mn}. \end{aligned}$$

Merk: Disse bevisene er identiske med de fra uke 40, så dersom du gjorde det oppgavesettet, så holder det å overbevise seg om at bevisene faktisk holder her også.

b) Vis at dersom $y \in F \setminus \{0\}$, så er

$$(x/y)^n = x^n/y^n.$$

(Merk at vi definerer $x/y = xy^{-1}$.)

Gitt et heltall $a = a_1 - a_2$ der $a_1, a_2 \in \mathbb{N}$, så setter vi

$$x^a = x^{a_1}/x^{a_2}.$$

c) Sjekk at definisjonen over er veldefinert, altså at om $b = b_1 - b_2$ er et heltall der $b_1, b_2 \in \mathbb{N}$ slik at $a = b$, så er $x^a = x^b$.

d) Bevis identiteten $x^{a+b} = x^a \cdot x^b$ for alle $a, b \in \mathbb{Z}$.

e) Bevis identiteten $x^{ab} = (x^a)^b$ for alle $a, b \in \mathbb{Z}$.

f) Bevis identiteten $(xy)^a = x^a y^a$ for alle $x, y \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ og $a \in \mathbb{Z}$.

Oppgave 1 løsning

a) Vi har at

$$\begin{aligned} 48 &= 2 \cdot 18 + 12, \\ 18 &= 1 \cdot 12 + 6, \\ 12 &= 2 \cdot 6 + 0. \end{aligned}$$

Dermed er 6 største felles divisor, og

$$6 = 18 - 12 = 18 - (48 - 2 \cdot 18) = 3 \cdot 18 - 1 \cdot 48.$$

b) Vi har at

$$\begin{aligned} 252 &= 2 \cdot 105 + 42, \\ 105 &= 2 \cdot 42 + 21, \\ 42 &= 2 \cdot 21 + 0. \end{aligned}$$

Dermed er 21 største felles divisor, og

$$21 = 105 - 2 \cdot 42 = 105 - 2 \cdot (252 - 2 \cdot 105) = 5 \cdot 105 - 2 \cdot 252.$$

c) Vi har at

$$\begin{aligned} 123 &= 1 \cdot 76 + 47, \\ 76 &= 1 \cdot 47 + 29, \\ 47 &= 1 \cdot 29 + 18, \\ 29 &= 1 \cdot 18 + 11, \\ 18 &= 1 \cdot 11 + 7, \\ 11 &= 1 \cdot 7 + 4, \\ 7 &= 1 \cdot 4 + 3, \\ 4 &= 1 \cdot 3 + 1. \end{aligned}$$

Dermed er 1 største felles divisor, og

$$\begin{aligned} 1 &= 4 - 1 \cdot 3 = 4 - 1 \cdot (7 - 1 \cdot 4) = 2 \cdot 4 - 1 \cdot 7 \\ &= 2 \cdot (11 - 1 \cdot 7) - 1 \cdot 7 = 2 \cdot 11 - 3 \cdot 7 \\ &= 2 \cdot 11 - 3 \cdot (18 - 1 \cdot 11) = 5 \cdot 11 - 3 \cdot 18 \\ &= 5 \cdot (29 - 1 \cdot 18) - 3 \cdot 18 \\ &= 5 \cdot 29 - 8 \cdot 18 \\ &= 5 \cdot 29 - 8 \cdot (47 - 1 \cdot 29) = 13 \cdot 29 - 8 \cdot 47 \\ &= 13 \cdot (76 - 1 \cdot 47) - 8 \cdot 47 \\ &= 13 \cdot 76 - 21 \cdot 47 \\ &= 13 \cdot 76 - 21 \cdot (123 - 1 \cdot 76) \\ &= 34 \cdot 76 - 21 \cdot 123 \end{aligned}$$

Oppgave 2 løsning

a) Dette stemmer: Dersom $a \mid b$, fins $q \in \mathbb{Z}$ slik at $aq = b$. Dette gir $b^2 = a^2q^2$, så $a^2 \mid b^2$.

b) Dette stemmer ikke: La $a = b = c = 2$. Vi har da at $a \mid c$ og $b \mid c$, men $ab = 4$ deler ikke $c = 2$.

c) Dette stemmer: $a \mid b$ gir en $k \in \mathbb{Z}$ slik at $ak = b$. Ved å gange med c på begge sider fås $(ac)k = bc$. Dette gir $ac \mid bc$.
d) Dette stemmer ikke: $-1 \mid 1$, men $-1 \neq 1$.

e) Dette stemmer: Vi viser det kontrapositive. Dersom $\neg(2 \mid a)$, så er a et oddetall, og vi kan skrive $a = 2k + 1$ for et heltall k. Vi får da at

$$a^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1.$$

Dette viser at a^2 er et oddetall, så $\neg(2 \mid a^2)$.

Oppgave 3 løsning

a) Anta at $q^2 = 3$. Vi kan skrive $q = a/b$ der $a, b \in \mathbb{Z}$ med $b \neq 0$ og $a \wedge b = 1$. Vi får da at

$$3b^2 = a^2.$$

Denne ligningen forteller oss at $3 \mid a^2$. Siden 3 er et primtall, gir Euklids lemma for primtall at $3 \mid a$. Vi kan da skrive $a = 3k$ for et heltall k, som gir

$$9k^2 = a^2 = 3b^2.$$

Ved å kansellere 3 får vi at $3k^2 = b^2$, som gir $3 \mid b^2$. Euklids lemma gir igjen at $3 \mid b$. Dette er en selvmotsigelse siden $a \wedge b = 1$.

b) Anta at $q^3 - q - 1 = 0$. Vi kan skrive $q = a/b$ der $a, b \in \mathbb{Z}$ med $b > 0$ og $a \wedge b = 1$. Vi får da at

$$a^3 - ab^2 - b^3 = 0.$$

Ved å skrive dette som $a^3 = b^2(a + b)$, ser vi at $b \mid a^3$. Men $a \wedge b = 1$ gir da at $b = 1$. Vi sitter da igjen med $a^3 - a - 1 = 0$. Skriver vi dette som $a(a^2 - 1) = 1$, gir dette $a \mid 1$, som gir $a = \pm 1$. Men ingen av disse to verdiene løser ligningen $a^3 - a - 1 = 0$. Vi har dermed oppnådd selvmotsigelsen vår.

Oppgave 4 løsning

Siden $a \mid c$ og $b \mid c$ fins det $k, l \in \mathbb{Z}$ slik at $ak = c$ og $bl = c$. Dette gir $a \mid bl$. Siden $a \wedge b = 1$, gir Euklids lemma at $a \mid l$. Multipliserer vi med b (som i Oppgave 2c)) får vi at $ab \mid bl = c$.

Oppgave 5 løsning

Dersom n er et partall, fins $k \in \mathbb{Z}$ slik at $n = 2k$. Dermed er $n^2 = 4k^2$. Dersom n er et oddetall, fins $l \in \mathbb{Z}$ slik at $n = 2' + 1$. Dermed er $n^2 = 4l^2 + 4l + 1 = 4(l^2 + l) + 1$.

Oppgave 6 løsning

a) Som nevnt er bevisene identiske med de gitt i uke 40.

b) Merk først at

$$x^n \cdot (x^{-1})^n = (x \cdot x^{-1})^n = 1^n = 1.$$

(At $1^n = 1$ kan bevises lett ved induksjon.) Dette gir at $(x^n)^{-1} = (x^{-1})^n$. Deretter følger det at

$$(x/y)^n = (xy^{-1})^n = x^n(y^{-1})^n = x^n(y^n)^{-1} = x^n/y^n.$$

c) Vi antar at $a = b$, der $a = a_1 - a_2$ og $b = b_1 - b_2$ for naturlige tall a_1, a_2, b_1, b_2. Da får vi at $a_1 + b_2 = b_1 + a_2$, så

$$x^{a_1} \cdot x^{b_2} = x^{a_1+b_2} = x^{b_1+a_2} = x^{b_1} \cdot x^{a_2}.$$

Deler vi med $x^{a_2} \cdot x^{b_2}$ på begge sider, får vi at

$$\frac{x^{a_1}}{x^{a_2}} = \frac{x^{b_1}}{x^{b_2}}.$$

Dette viser veldefinertheten.

d) La $a = a_1 - a_2$ og $b = b_1 - b_2$ der $a_i, b_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2$. Ved å bruke at tilsvarende egenskap allerede er kjent for naturlige tall, fås

$$x^{a+b} = x^{(a_1+b_1)-(a_2+b_2)} = \frac{x^{a_1+b_1}}{x^{a_2+b_2}} = \frac{x^{a_1}x^{b_1}}{x^{a_2}x^{b_2}} = \frac{x^{a_1}}{x^{a_2}} \cdot \frac{x^{b_1}}{x^{b_2}} = x^a x^b.$$

e) La a og b være som før. Denne gangen får vi at

$$(x^a)^b = \frac{(x^a)^{b_1}}{(x^a)^{b_2}} = \frac{(x^{a_1}/x^{a_2})^{b_1}}{(x^{a_1}/x^{a_2})^{b_2}} = \frac{(x^{a_1})^{b_1}/(x^{a_2})^{b_1}}{(x^{a_1})^{b_2}/(x^{a_2})^{b_2}} = \frac{x^{a_1b_1}/x^{a_2b_1}}{x^{a_1b_2}/x^{a_2b_2}} = \frac{x^{a_1b_1}x^{a_2b_2}}{x^{a_1b_1}x^{a_2b_1}} = \frac{x^{a_1b_1+a_2b_2}}{x^{a_1b_2+a_2b_1}} = x^{ab}.$$

f) Her får vi

$$(xy)^a = \frac{(xy)^{a_1}}{(xy)^{a_2}} = \frac{x^{a_1}y^{a_1}}{x^{a_2}y^{a_2}} = \frac{x^{a_1}}{x^{a_2}} \cdot \frac{y^{a_1}}{y^{a_2}} = x^a y^a.$$