Oppgaver uke 44

Oppgave 1

Regn ut største felles divisor d for a og b, og skriv d som en lineærkombinasjon av a og b med heltallskoeffisienter, i følgende tilfeller:

a) $a = 18$, $b = 48$.

b) $a = 252$, $b = 105$.

c) $a = 123$, $b = 76$.

Oppgave 2

Avgjør hvilke av følgende utsagn som generelt er sanne for alle $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Gi bevis dersom sant, og moteksempel dersom ikke sant.

a) $a \mid b \implies a^2 \mid b^2$.

b) $a \mid c \ \wedge \ b \mid c \implies ab \mid c$.

c) $a \mid b \implies ac \mid bc$.

d) $a \mid 1 \implies a = 1$.

e) $2 \mid a^2 \implies 2 \mid a$.

Oppgave 3

I forelesningen beviste vi at det ikke fins et rasjonalt tall q slik at $q^2 = 2$. Bruk en lignende taktikk til å vise følgende:

a) Vis at det ikke fins et rasjonalt tall q slik at $q^2 = 3$.

b) Vis at det ikke fins et rasjonalt tall q slik at $q^3 - q - 1 = 0$.

Oppgave 4

La $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Vis at dersom $a \mid c$, $b \mid c$ og $a \wedge b = 1$, så vil $ab \mid c$. (Hint: Bruk Euklids lemma.)

Oppgave 5

Vis at alle kvadratttall, dvs. alle tall på formen n^2 der $n \in \mathbb{N}$, er på formen $4k$ eller $4k + 1$ for et heltall $k \in \mathbb{N}$.
Hint: Bruk at n enten er et partall eller et oddetall.

Oppgave 6

La $(F, +, \cdot, 0, 1)$ være en kropp. I denne oppgaven er målet å gi mening til potenser x^a der $x \in F \setminus \{0\}$ og $a \in \mathbb{Z}$. Spesielt lar dette oss definere x^a når x er et rasjonalt tall. Videre skal vi bevise identiteter for disse potensene.

Vi begynner med tilfellet der $n \in \mathbb{N}$. Da definerer vi x^n for $x \in F \setminus \{0\}$ ved rekursjon på samme måte som i uke 40:

$$\begin{aligned} q^0 &= 1, \\ q^{n+1} &= q \cdot q^n, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

a) Vis at følgende identiteter holder for alle $x, y \in F$ og $m, n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} (xy)^n &= x^n y^n, \\ x^{m+n} &= x^m x^n, \\ (x^m)^n &= x^{mn}. \end{aligned}$$

Merk: Disse bevisene er identiske med de fra uke 40, så dersom du gjorde det oppgavesettet, så holder det å overbevise seg om at bevisene faktisk holder her også.

b) Vis at dersom $y \in F \setminus \{0\}$, så er

$$(x/y)^n = x^n/y^n.$$

(Merk at vi definerer $x/y = xy^{-1}$.)

Gitt et heltall $a = a_1 - a_2$ der $a_1, a_2 \in \mathbb{N}$, så setter vi

$$x^a = x^{a_1}/x^{a_2}.$$

c) Sjekk at definisjonen over er veldefinert, altså at om $b = b_1 - b_2$ er et heltall der $b_1, b_2 \in \mathbb{N}$ slik at $a = b$, så er $x^a = x^b$.

d) Bevis identiteten $x^{a+b} = x^a \cdot x^b$ for alle $a, b \in \mathbb{Z}$.

e) Bevis identiteten $x^{ab} = (x^a)^b$ for alle $a, b \in \mathbb{Z}$.

f) Bevis identiteten $(xy)^a = x^a y^a$ for alle $x, y \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ og $a \in \mathbb{Z}$.