Oppgaver uke 45

Oppgave 1

I de følgende oppgavene gjelder det å bruke at gitt $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, så er enhver $a \in \mathbb{Z}$ kongruent med ett av tallene $0 \leq r < n$, modulo n. Ofte fins det snarveier der du bruker dette faktum for en modulus mindre enn den gitte modulusen i oppgaven (prøv for eksempel å bruke at ethvert tall er kongruent med 0 eller 1 modulo 2 i oppgave b) under).
Et kvadrattall er et tall på formen n^2 for et heltall n, og et kubikktall er et tall på formen n^3 for et heltall n.

a) Vis at alle oddetall er kongruent med 1 eller 3 modulo 4.

b) Vis at alle kvadrattall er kongruent med 0 eller 1 modulo 4.

c) Vis at alle kvadrattall er kongruent med 0, 1 eller 4 modulo 5.

d) Vis at alle kvadrattall er kongruent med 0, 1 eller 4 modulo 8.

e) Vis at alle primtall større enn 3 er kongruent med 1 eller 5 modulo 6.

f) Vis at alle kubikktall er kongruent med 0, 1 eller 8 modulo 9.

Oppgave 2

Vis at følgende ligninger ikke har heltallsløsninger ved å bruke kongruensregning. Det kan hende du får bruk for resultatene fra Oppgave 1.

a) $2x + 4y = 7$.

b) $x(x + 1) = 8y + 1$

c) $x^2 + y^2 = 103$.

d) $x^2 - 5y^2 = 2$.

e) $x^3 + y^3 + z^3 = 4$.

Oppgave 3

I denne oppgaven skal du vise at det fins "uendelig mange" primtall som er kongruente med 3 modulo 4: Mer presist, vis følgende: Gitt enhver liste $p_0, \ldots, p_{n-1}$ av primtall som er kongruente med 3 modulo 4, så fins det et primtall q som er kongruent med 3 modulo 4 slik at $q \notin \{p_0, \ldots, p_{n-1}\}$. (Hint: Betrakt tallet $N = 4p_0 \cdots p_{n-1} - 1$. Hvorfor må N ha en primtallsfaktor som er kongruent med 3 modulo 4?)

Oppgave 4

Vi definerer $n! \in \mathbb{N}$ gitt $n \in \mathbb{N}$ rekursivt som følger:

$$\begin{aligned} 0! &= 1, \\ (n+1)! &= (n+1) \cdot n!\,, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Legg merke til at vi her bruker den mer sofistikerte rekursjonen presentert i Proposisjon 3.2.9 i læreboka, eventuelt Proposisjon 4.17 i forelesningsnotatene.

La $n \in \mathbb{N}$. Vis at ingen av tallene i mengden

$$A = \{(n+1)! + k : 2 \leq k \leq n+1\}$$

er primtall. (Dette viser at vi kan finne lister av etterfølgende sammensatte tall av vilkårlig lang lengde)

Oppgave 5

Gitt $n \in \mathbb{N}$ og $k \in \mathbb{N}$ med $0 \leq k \leq n$ så definerer vi binomialkoeffisienten

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

a) Vis Pascals regel:

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}, \qquad n \in \mathbb{N},\ 0 \leq k < n.$$

b) Bruk Pascals regel til å vise ved induksjon at alle binomialkoeffisienter er heltall. (Hint: Vis følgende utsagn med induksjon på n: $\binom{n}{k}$ er et heltall for alle $0 \leq k \leq n$).

c) Vis at

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}, \qquad n \geq 1,\ 1 \leq k \leq n.$$

Konkluder ved hjelp av Euklids lemma at $n \mid \binom{n}{k}$ for $1 \leq k \leq n-1$ dersom $n \wedge k = 1$.

d) Ved å ta binomialformelen for gitt:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k, \qquad n \in \mathbb{N},\ a, b \in \mathbb{Z},$$

vis at identiteten

$$(x+y)^p = x^p + y^p, \qquad x, y \in \mathbb{Z}_p,$$

holder i ringen $\mathbb{Z}_p$ der p er et primtall. (Du kan også bevise binomialformelen om du vil: Dette kan gjøres ved hjelp av Pascals regel over.)