

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamensdato: MAT1140 — Strukturer og argumenter

Eksamensdag: Torsdag 4. desember 2014

Tid for eksamen: 09.00 – 13.00

Oppgavesettet er på 3 sider.

Vedlegg: Ingen

Tillatte hjelpeemidler: Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Hvert delpunkt har samme vekt. Du kan bruke resultater fra andre punkter når du løser et punkt, selv om du ikke har fått til disse.

Oppgave 1

Undersøk om følgende utsagn er en tautologi:

$$(A \Rightarrow B) \vee (\sim A \Rightarrow \sim C).$$

Oppgave 2

2a

Skriv 3 som en lineærkombinasjon av 25 og 36.

La ϕ være Eulers ϕ -funksjon.

Finn $\phi(36)$ og $25^{26} \pmod{36}$.

2b

Hva mener vi med en kvadratisk rest?

Likningen for det gyldne snitt er

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Vi skal se på denne likningen i $\mathbb{Z}/(p)$ for $p = 7$ og $p = 11$.

Finn alle kvadratiske rester i $\mathbb{Z}/(7)$ og i $\mathbb{Z}/(11)$.

Finn alle løsninger av likningen

$$\bar{x}^2 - \bar{x} - \bar{1} = \bar{0}$$

i $\mathbb{Z}/(7)$ og i $\mathbb{Z}/(11)$.

Forklar hvordan du tenker.

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 3

3a

La $G = (V, E)$ være en sammenhengende graf med seks hjørner slik at det ene hjørnet (navet) har grad 5 og de andre hjørnene har grad 3.

Hvor mange kanter har grafen?

Lag en tegning av G og begrunn hvorfor opplysningene er tilstrekkelige til å bestemme G opp til isomorfi.

3b

Hva mener vi med at en graf er k -fargbar?

Er grafen fra punkt 3a 3-fargbar?

Er grafen 4-fargbar?

Begrunn svarene.

3c

Hvis A og B er to mengder, definerer vi *den disjunkte unionen* som

$$A \uplus B = (\{0\} \times A) \cup (\{1\} \times B).$$

La (V, E) være en sammenhengende graf (ikke nødvendigvis den fra punktene over) og la *sylindergrafen* (V^S, E^S) være definert ved

1. $V^S = V \uplus V$
2. E^S består av alle parene $\{(i, u), (i, v)\}$, hvor $i = 0$ eller $i = 1$, og av alle parene $\{(0, v), (1, v)\}$ hvor $v \in V$.

Vis at hvis $k \geq 2$ og (V, E) er k -fargbar, så er sylindergrafen også k -fargbar.

Oppgave 4

La (A, \leq) være en partielt ordnet mengde uten maksimale elementer.

Vis at hvis $A \neq \emptyset$ er tellbar, finnes det en strengt voksende funksjon $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ slik at

$$\{f(n) ; n \in \mathbb{N}\}$$

ikke har noen øvre skranke.

Oppgave 5

Hvis A og B er to mengder, definerer vi *den symmetriske differensen* $A \triangle B$ som mengden av de punktene som er i nøyaktig en av mengdene A og B .

5a

Illustrer $A \triangle B$ med et Venn-diagram og vis

1. $A \triangle A = \emptyset$
2. $A \triangle B = B \triangle A$

(Fortsettes på side 3.)

$$3. A \Delta C \subseteq (A \Delta B) \cup (B \Delta C)$$

for alle mengder A, B og C .

5b

Hvis X er en uendelig mengde og A og B er delmengder av X , lar vi

$$A \sim B$$

hvis

$$A \Delta B$$

er endelig.

Vis at \sim er en ekvivalensrelasjon på $\mathcal{P}(X)$.

5c

La X være tellbart uendelig og la \sim være som i 5b.

Vis at hver ekvivalensklasse er tellbar og at det finnes overtellbart mange ekvivalensklasser.

SLUTT