# §1. REELLE TALL.

Naturlige tall

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

Vi har operasjonene $x+y$, $xy$

$$x+y = y+x$$
$$(x+y)+z = x+(y+z)$$
$$xy = yx$$
$$(xy)z = x(yz)$$
$$x(y+z) = xy + yz.$$

$$x \cdot 1 = x.$$

Heltall:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}.$$

Har nå fått et element 0 og enhver $x$ fins $(-x)$ s.a. for

$$x+0 = x \qquad x+(-x) = 0$$

Med disse egenskapene er $\mathbb{Z}$ et eksempel på en ring

Rasjonale tall

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z} \right\}, \quad q \neq 0.$$

Nå har alle $x \in \mathbb{Q}$, $x \neq 0$, en multiplikativ invers $x^{-1}$ s.a. $x \cdot x^{-1} = 1$.

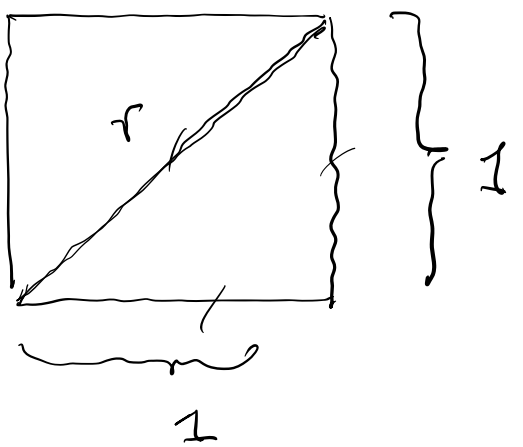
$\mathbb{Q}$ er et eksempel på en kropp

Vi har vidre en ordning $\leq$ på $\mathbb{Q}$, som tilfredsstiller visse egenskaper.

Vagt spørsmål: er det nok elementer i $\mathbb{Q}$ for å beskrive verden rundt oss? Eller å beskrive matematikk slik vi kjenner?

**Teorem:** Det finns ikke noe rasjonalt tall $r \in \mathbb{Q}$ s.a. $r^2 = 2$.

Det finns ikke noe rasjonalt tall $r$ som tilsvarer lengden til diagonalen i et kvadrat med sider med lengde 1.




Pythagoras:

$$r^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

**Bevis:**

- Anta at $r = p/q$ tilfredsstiller $r^2 = 2$.
- Anta at $p$ og $q$ ikke har noen felles faktorer.

Spesielt: $p$ og $q$ er ikke

begge partall.

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{p^2}{q^2} = 2$$

$$\Leftrightarrow \quad p^2 = 2q^2$$

partall.

Så da er $p^2$ et partall.

Da må $p$ være et partall,

det vi si at $p = 2k$, $k \in \mathbb{N}$.

$$p^2 = 2q^2$$

$$(2k)^2 = 2q^2$$

$$4k^2 = 2q^2$$

$$2k^2 = q^2$$

partall

Da er $q$ et partall.

ABSURD! $\Rightarrow\Leftarrow$ ∎

Det ser ut til å være "hull" i $\mathbb{Q}$.

Vårt: de reelle tallene $\mathbb{R}$ er konstruert for å fylle hullene.

DEF 1.3.1 En delmengde $A$ av en ordnet mengde $K$ sies å være begrenset ovenfra dersom det finns $b \in K$ s.a. $a \leq b$ for alle $a \in A$. En slik $b$ kalles en øvre skranke.

FKS: La $A \subset \mathbb{Q}$ være nedadenn

$A = [0, 2]$




F. eks. er 3 en øvre skranke.

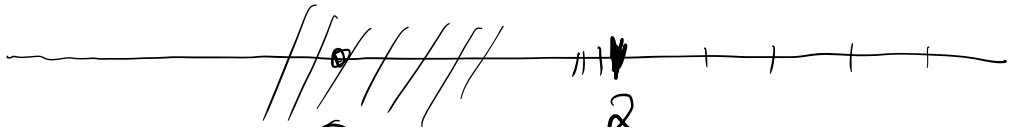
A er begrenset.

DEF 1.3.7. A, K som over, V. Et element $s \in K$ kalles a være en minste øvre skranke for A, dersom for alle øvre skranker $s'$ for A, så har vi at $s \leq s'$.

EKS La $A \subset \mathbb{Q}$ være mengden

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}.$$

A er begrenset, minste øvre skranke for A.



Veldig kort: De reelle tall $\mathbb{R}$

er en utvidelse av $\mathbb{Q}$

slik at enhver begrenset

mengde har en minste skranke.

$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. $x+y$, $x \cdot y$,

Jobb med : 1.3.1. og 1.3.2.

