REP

- $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

- De reelle tallene $\mathbb{R}$ er en utvidelse av $\mathbb{Q}$ som tilfredsstiller Kompletthetsaksiomet:

> Enhver mengde $A \subset \mathbb{R}$ som begrenset ovenfra har en minste øvre skranke også kalt et supremum $s = \sup(A)$.

EKS: $A = (-\infty, 2)$

- En øvre skranke er for eksempel $b = 3$.
- $\sup(A) = 2$.

Kapitel 1.

Uppgave 1.3.1.

(a) En mängd $A \subset \mathbb{R}$ är begränsad nedanför om det finns $b \in \mathbb{R}$ s.a. $a \geq b$ för alla $a \in A$. En sådan b kallas en nedre skranka.

En nedre skranka i är en största nedre skranka om för alla nedre skrankor i' så har vi $i \geq i'$. En sådan i kallas oqså ett infimum $i = \inf(A)$.

(b) Lemma 1.3.8': Anta att $z \in \mathbb{R}$ är en nedre skranka för $A \subset \mathbb{R}$. Då är $z = \inf(A)$ hvis för alla $\varepsilon > 0$ så finns $a \in A$ s.a.

$a - z < \varepsilon$.

Bevis: Anta først at $z = \inf(A)$, og la $\varepsilon > 0$.
Dersom $a - z \geq \varepsilon$ for alle $a \in A$, da er $a \geq z + \varepsilon$ for alle $a \in A$. Men da er $z + \varepsilon$ en nedre skranke. Absurd, så det fins $a \in A$ s.a. $a - z < \varepsilon$.

Motsatt:
La z' være en nedre skranke og anta for motsigelse at $z' > z$.

Men da fins $a \in A$ s.a.

$$a - z < \underbrace{z' - z}_{\varepsilon}$$

Da har vi $a < z'$, som motsier at z' er en nedre skranke.

1.3.8

(a) $\frac{m}{n}$, $m < n$

Fikser m, og la $n \to \infty$

$\frac{m}{n} \to 0$, $\quad \inf = 0$

La $m = n-1$

$\frac{n-1}{n} \to 1$ $\quad \sup = 1$.

"$1 - 1/n$" $\quad n \to \infty$,

(b) $(-1)^m/n$ $\quad m, n \in \mathbb{N}$.

$(-1)/1 = -1 = \inf$.

$(-1)^2/1 = 1 = \sup$.