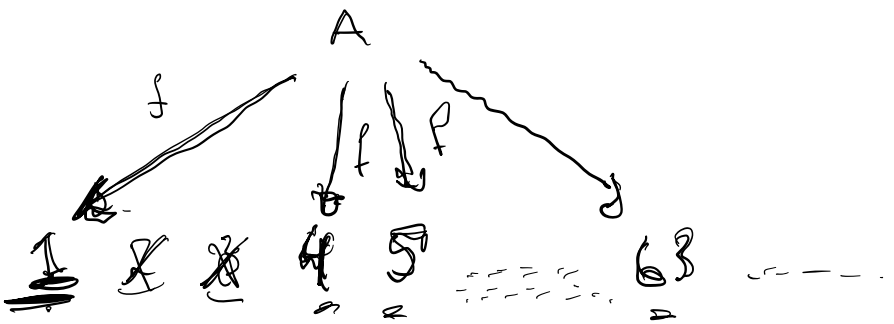
Prop: La A vara en mengd.

(i) Dersom $f: A \to \mathbb{N}$ är injektiv (1-1) så är A ellbara eller ändlig.

(ii) Dersom $g: \mathbb{N} \to A$ är surjektiv (på) så är A ellbara eller ändlig.

(ii)



Bevis för (i): Anta att A ickeändlig. Induktiv konstruktion.

La $n_1 = \min\{n \in \mathbb{N} : f(a) = n,\ a \in A\}$.

La $n_2 = \min\{n \in \mathbb{N} : f(a) = n,\ a \in A,\ n > n_1\}$.

Anta at vi har konstruert $n_1, \dots, n_k$.

Skal konstruere n_{k+1}.

$n_{k+1} = \min\{n \in \mathbb{N} : f(a) = n,\ a \in A,\ n > n_k\}$

Definer $h : \mathbb{N} \to A$ ved

$$h(j) = f^{-1}(n_j).$$

Da er h en bijeksjon. ∎

Prop: $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ er tellbar.

Bevis: Definer $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

ved $f(n, m) = 2^n \cdot 3^m$

Da er f injektiv,

på grunn av unik primtalls-

faktorisering.

Da følger resultatet fra

kvoposisjonen. ∎

Bevis for at $\mathbb{Q}$ er tellbar:

Beviser først at $\mathbb{Q}_+$ er tellbar.

Definer $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}_+$ ved

$g(n,m) = n/m$.

g er surjektiv. Da følger

det at $\mathbb{Q}_+$ er tellbar ved

(iii) : proposition.

- $\mathbb{Q}_-$ est dénombrable.

Donc : $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}_+$

est dénombrable. (1.5.8). ∎