MAT2100 - ELEMENTÆR REELL ANALYSE - VÅR 2026

E. F. WOLD

6. Følger og rekker av funksjoner, uke 15&16, kapittel 6 i Abbott

Anbefalte forberedelser: Gå tilbake og les om rekker i delkapittel 2.7, side 71–74. Repeter eller gjør prosjektoppgavene om *rekker* fra Kapittel 2.

Definisjoner:

(6.2.1.) Punktvis konvergens
(6.2.3.) Uniform konvergens
(6.4.1.) Rekker av funksjoner

Setninger:

(6.2.5.) Cauchy-kriterium for konvegens av følger
(6.2.6.) Resultat om kontinuerlig grense
(6.3.1.) Resultat om deriverbar grense
(6.4.2.) Kontinuitetsteorem for rekker
(6.5.2.) Konvergens av potensrekker

Oppgaver til innlevering:
Finner du i slutten av forelesningsnotatene.

FORELESNINGSNOTATER - KAPITTEL 6

Forelesningsnotatene er ikke ment å erstatte boken eller det å gå på forelesning. De er skrevet for å få en grei oversikt over stoffet, og dels som mine egne forelesningsnotater.

6.1. Punktvis konvergens.

Definisjon 6.1. (6.2.1.)(Punktvis konvergens) La $A \subset \mathbb{R}$ og la $f_n : A \to \mathbb{R}$ for $n \in \mathbb{N}$. Vi sier at $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergerer punktvis* mot $f : A \to \mathbb{R}$ dersom for vi for hver $x \in A$ har at $y_n := f_n(x)$ konvergerer mot $y := f(x)$.

Det betyr at hver gang vi fikserer x så konvergerer den "ordinære" følgen y_n av punkter mot y. Det vil si, for alle $\epsilon > 0$ fins $N_x \in \mathbb{N}$ slik at

$$|y_n - y| < \epsilon \text{ for } n \geq N_x$$

Vi skriver N_x fordi tallet N_x kan, og gjerne vil, avhenge av punktet x - derav begrepet "punktvis konvergens".

Date: April 20, 2026.

Eksempel 6.2. La $A = [0, 1]$ og definer $f_n(x) = (1-x)^n$. Vi påstår at denne følgen konvergerer punktvis mot funksjonen $f(x)$ som er definert ved $f(0) = 1$ og $f(x) = 0$ for $x \neq 0$. I så fall er det verdt å merke seg

(i) Hver f_n er kontinuerlig, men f er det ikke.

Vi kan se at δ_x avhenger avhenger av x i dette tilfellet. Velg $x_m = 1/m$. Da har vi at

$$f_n(x_m) = (1 - 1/m)^n = (\frac{m-1}{m})^n$$

Dersom vi fikserer henholdsvis m og n har vi

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_m) = 0 \text{ og } \lim_{m\to\infty} f_n(x_m) = 1$$

Dette viser at

(ii) $f_n(x_m) \to 0$ for alle fikserte m men at konvergensen er tregere og tregere når $m \to \infty$.

Lag en tegning av grafene til noen av funksjonene f_n så får du kanskje en visuell følelse av hvorfor.

Vi har her å gjøre med en nokså *svak* form for konvergens, og vi ønsker oss noe sterkere. For eksempel ønsker vi oss at dersom $f_n \to f$ (i en ny forstand), så vil f være kontinuerlig dersom hver f_n er det.

6.2. **Uniform konvergens.**

Definisjon 6.3. (6.2.3.)(Uniform konvergens) La $A \subset \mathbb{R}$ og la $f_n : A \to \mathbb{R}$ for $n \in \mathbb{N}$. Vi sier at $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergerer uniformt* mot $f : A \to \mathbb{R}$ dersom det for alle $\epsilon > 0$ fins $N \in \mathbb{N}$ slik at

$$|f(x) - f_n(x)| < \epsilon \text{ for alle } n \geq N \text{ og alle } x \in A$$

Forskjellen mellom uniform og punktvis konvergens er altså: for hver ϵ fins en N som gjelder for *alle* x - ikke bare en fiksert x.

Oppgave: Vis at uniform konvergens impliserer punktvis konvergens.

Ser vi på eksempelet fra i sted ser vi altså at konvergensen *ikke* er uniform.

Teorem 6.4. *(6.2.5.)(Cauchy-kriterium) En følge funksjoner $f_n : A \to \mathbb{R}$ konvergerer uniformt mot en $f : A \to \mathbb{R}$ hvis og bare hvis det for hver $\epsilon > 0$ fins $N \in \mathbb{N}$ slik at $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \epsilon$ for alle $n, m \geq N$ og alle $x \in A$.*

Teorem 6.5. *(6.2.6)(Kontinuerlige grenser) Se på en følge funksjoner $f_n : A \to \mathbb{R}$ som konvergerer uniformt mot en $f : A \to \mathbb{R}$. Dersom hver f_n er kontinuerlig i $c \in A$ så er f kontinuerlig i c.*

Bevis: La $\epsilon > 0$. Siden f_n konvergerer uniformt mot f fins N slik at $|f_N(y) - f(y)| < \epsilon/3$ for alle $y \in A$. Videre fins $\delta > 0$ slik at $|f_N(x) - f_N(c)| < \epsilon/3$ når $|x - c| < \delta$. Vi får da, for $|x - c| < \delta$, at

$$|f(x) - f(c)| \leq \|f(x) - f_N(x)\| + \|f_N(x) - f_N(c)\| + \|f_N(c) - f(c)\| < \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon$$

□

Naturlig spørsmål: La $f_n : A \to \mathbb{R}$ være en følge av deriverbare funksjoner på A som konvergerer uniformt mot en funksjon f. Må f nødvendigvis være deriverbar? Og i så fall, konvergerer f_n' uniformt mot f'?

Oppgave 6.6. Definer

$$f_n(x) = (1-(1-x)^n)\cdot x \text{ for } x \geq 0 \ \& \ f_n(x) = -(1-(1+x)^n)\cdot x \text{ for } x \leq 0$$

Bevis at $f_n(x) \to |x|$ uniformt på $[-1,1]$ når $n \to \infty$, og at f_n er deriverbar på [-1,1] for alle n. Observer at f_n' er kontinuerlig for alle n men at $\{f_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$ ikke er konvergent.

Bemerkning 6.7. Faktisk er det tilfelle at alle kontinuerlige funksjoner på et intervall $[a,b]$ er en uniform grense av (uendelig ganger) deriverbare funksjoner, til og med av polynomer. Dette er såkalte *Weierstrass' approksimasjonssats.*

Men følgende er sant: La $f_n : (a,b) \to \mathbb{R}$ være en følge deriverbare funksjoner som konvergerer uniformt mot $f : (a,b) \to \mathbb{R}$. Anta at hver f_n' er kontinuerlig, og at $f_n' \to g$ uniformt. Da er f deriverbar og $f' = g$ (sterkere resultater holder også).

6.3. **Rekker av funksjoner.** La $h_n : A \to \mathbb{R}$ være en funksjon for alle $n \in \mathbb{N}$. En *rekke* av funksjoner er et uttrykk på formen

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} h_n$$

Vi mener med dette at for hver $x \in A$ så har vi $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n(x)$ - dersom dette gir mening. For hver fikserte x er altså $f(x)$ en rekke i kjent forstand fra Kapittel 2

Den k'te *delsummen* til rekka er definer ved

$$f_k = \sum_{n=0}^{k} h_n$$

slik at $\{f_k\}$ er en følge av funksjoner definert på A. Vi sier at rekka konvergerer *punktvis* dersom $f_k(x)$ konvergerer for alle x og at rekka konvergerer *uniformt* hvis f_k konvergerer uniformt.

Eksempel 6.8. La $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være definert ved $h_n(x) = x^n$. Da har vi at

$$f_k(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^k$$

Oppgave 6.9. Vis at $f_k(x)$ ikke konvergerer for noen x med $|x| \geq 1$.

For $|x| < 1$ vet vi fra tidligere at

$$f_k(x) = \frac{1-x^{k+1}}{1-x} \ \& \ f_k(x) \underset{k\to\infty}{\to} \frac{1}{1-x} =: f(x)$$

For å avgjøre om konvergensen er punktvis eller uniform ser vi på $f - f_k$

$$f(x) - f_k(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{1-x^k}{1-x} = \frac{x^k}{1-x} \to \infty \text{ når } x \to 1^-$$

Så konvergensen er *ikke* uniform; den er tregere og tregere når x nærmer seg 1. Men konvergensen *er* uniform på enhver $A = [-a,a]$ der $0 \leq a < 1$.

Oppgave 6.10. Bevis dette.

Bemerkning 6.11. Det følger automatisk fra Teorem 6.5 at hvis $\sum_{n\in\mathbb{N}} h_n$ er en rekke av *kontinuerlige* funksjoner $h_n : A \to \mathbb{R}$, og hvis rekka konvergerer uniformt mot en funksjon $f : A \to \mathbb{R}$, så er f kontinuerlig.

Vi sier at en rekke $\sum_{n\in\mathbb{N}} h_n$ av funksjoner $h_n : A \to \mathbb{R}$ er *absolutt konvergent* dersom $\sum_{n\in\mathbb{N}} |h_n|$ er konvergent.

Oppgave 6.12. Bevis at dersom $f = \sum_{n\in\mathbb{N}} h_n$ er absolutt konvergent, så er f konvergent. Dersom $\sum_{n\in\mathbb{N}} |h_n|$ konvergerer uniformt så konvergerer $\sum_{n\in\mathbb{N}} h_n$ uniformt mot f.

Løsning: La $x \in A$, og la $\epsilon > 0$. For $m < n$ har vi at

$$|\sum_{i=m+1}^{n} h_i(x)| \leq \sum_{i=m+1}^{n} |h_i(x)|$$

så hvis $f(x)$ er absolutt konvergent fins $N \in \mathbb{N}$ slik at $|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$ når $m, n \geq N$. Så $\{f_k(x)\}$ er en Cauchy-følge og dermed konvergent. Dersom $\sum_{n\in\mathbb{N}} |h_n|$ er uniformt konvergent kan N velges uavhengig av x.

6.4. **Potensrekker.** Inspirert av eksempelet over definerer vi nå *potensrekker* som rekker

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n \cdot x^n, c_n \in \mathbb{R}$$

Disse kan sees på som generaliseringer av polynomer, for hvilke alle a_n'ene bortsett fra endelig mange er null. I motsetning til for polynomer konvergerer ikke slike rekker nødvendigvis for alle x (det har vi allerede sett over).

Mange funksjoner vi kjenner fra før er gitt ved potensrekker; slike funksjoner er mye mer "regulære" enn generelle deriverbare, eller til og med uendelig ganger deriverbare, funksjoner. For eksempel har vi

$e^x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^n}{n!}$ for alle $x \in \mathbb{R}$
$\cos(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ for alle $x \in \mathbb{R}$
$\sin(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ for alle $x \in \mathbb{R}$

Disse funksjonene er eksempler på hva man kaller *reell analytiske funksjoner*.

Teorem 6.13. *La $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n x^n$ være en potensrekke. Anta at det fins $b > 0$ slik at $\{c_n b^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ er begrenset. Da konvergerer potensrekka absolutt og uniformt på ethvert intervall $[-a, a]$ med $0 \leq a < b$; spesielt er f kontinuerlig på $[-a, a]$ og rekka konvergerer uniformt mot f.*

Proof. Fikser M slik at $|a_n b^n| \leq M$ for alle n. Ideen er nå å redusere til tilfellet med en geometrisk rekke. Fikser a. Dersom vi setter

$$g_k(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_k x^k|$$

må vi vise at for alle $\epsilon > 0$ så fins $N \in \mathbb{N}$ slik at

$$|g_m(x) - g_n(x)| < \epsilon \text{ for alle } x \in [-a, a] \text{ når } N \leq m < n$$

Vi har at

$$|a_k x^k| = |a_k b^k (x/b)^k| \leq M(a/b)^k \text{ der } (a/b) < 1$$

Dermed har vi at

$$\begin{aligned} g_n(x) - g_m(x) &= \sum_{i=m+1}^{n} |a_i x^i| \leq M \cdot \sum_{i=m+1}^{n} (a/b)^i = M \cdot \left(\frac{1-(a/b)^{n+1}}{1-(a/b)} - \frac{1-(a/b)^{m+2}}{1-(a/b)}\right) \\ &= M \cdot \frac{(a/b)^{m+2} - (a/b)^{n+1}}{1-(a/b)} = M \cdot \frac{(a/b)^{m+2}(1-(a/b)^{n-m-1})}{1-(a/b)} \underset{N\to\infty}{\to} 0 \end{aligned}$$

□

Bemerkning 6.14. For en potensrekke $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n x^n$ som konvergerer på et intervall $(-a, a)$ har vi at f er deriverbar, og

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} \text{ på } (-a, a)$$

Videre er f er integrerbar på $(-a, a)$, og hvis $g' = f$ har vi at

$$g(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1} + \widehat{c}_0, \widehat{c}_0 \in \mathbb{R}$$

I denne forstand kan vi altså manipulere potensrekker som vi manipulerer polynomer.

6.5. **Prosjekt 6.**

Oppgave 1(6.2.6.)

La $A \subset \mathbb{R}$ og anta at $f_n \to f$ på A. For hvert av følgende utsagn, gi et eksempel på at utsagnet er falskt dersom konvergensen kun er punktvis. Etterpå, avgjør om hvert utsagn er riktig dersom konvergensen er uniform.

(a) Hvis hver f_n er uniformt kontinuerlig så er f uniformt kontinuerlig.

(b) Hvis hver f_n er begrenset så er f begrenset.

(c) Hvis hver f_n har endelig mange diskontinuiteter så har f endelig mange diskontinuiteter.

(d) Hvis hver f_n har færre enn M diskontinuiteter så har f færre enn M diskontinuiteter.

(e) Hvis f_n har tellbart mange diskontinuiteter så har f tellbart mange diskontinuiteter.

Oppgave 2 (6.4.10.)

La $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ være en bijeksjon, og sett $x_n = g(n)$. La $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være definert ved

$$h_n(x) = \begin{cases} 2^{-n} & \text{hvis } x > x_n \\ 0 & \text{if } x \leq x_n \end{cases}$$

Sett $f_n = \sum_{k=0}^{n} h_k$.

(a) Vis at f_n konvergerer uniformt mot en monoton funksjon f.

(b) Vis at f er kontinuerlig i alle irrasjonale punkter.

(c) Vis at $f(x) \geq f(x_n) + 2^{-n}$ for alle $x > x_n$.

Oppgave 3

La $A \subset \mathbb{R}$ være en F_σ-mengde uten indre punkter. Vis at det fins en funksjon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ slik at diskontinuitetsmengden D_f til f er A.

Hint: Vis først resultatet under antagelsen av A er en lukket mengde.

7. Rekker og rekker av funksjoner, uke 17&18, deler av kapittel 2 og 6 i Abbott

Anbefalte forberedelser: Les kapittel 2 og 6 om rekker og rekker av funksjoner.

Definisjoner:

(2.4.3.) Rekker og konvergens av rekker
(6.4.1.) Rekker av funksjoner

Setninger:

(2.7.6.) Absolutte rekker er konvergente
(6.3.1.) Resultat om deriverbar grense
(6.4.2.) Kontinuitetsteorem for rekker
(6.5.2.) Konvergens av potensrekker
(7.4) Konvergenskriterie
(7.6) Konvergenskriterie

Oppgaver til innlevering:
Finner du i slutten av forelesningsnotatene.

FORELESNINGSNOTATER - UKE 17/18

Forelesningsnotatene er ikke ment å erstatte boken eller det å gå på forelesning. De er skrevet for å få en grei oversikt over stoffet, og dels som mine egne forelesningsnotater.

7.1. **Rekker.** Vi skal nå se på rekker - det vil si uttrykk på formen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n, a_n \in \mathbb{R} \tag{7.1}$$

Vi har allerede sett eksempler, for eksempel *geometriske rekker*

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \tag{7.2}$$

Vi har nok sett tidligere at for $|r| < 1$ så har vi

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} \tag{7.3}$$

Men hva betyr egentlig dette? Hva er en uendelig sum? La oss først se på tilfellet $0 < r < 1$ (vi lager en tegning for å få en intuisjon - kom på forelesning).

For å gjøre dette rigid reduserer vi til å snakke om følger. Vi definerer først

$$s_m = \sum_{n=0}^{m} r^n$$

Dette kalles den *m'te delsummen* til rekka. Da er $\{s_m\}_{N\in\mathbb{N}}$ en følge, og vi sier at rekka konvergerer mot et tall s dersom følgen s_m konvergerer mot s, og i så fall sier vi at den uendelige summen er lik s, altså (7.3) med $s = \frac{1}{1-r}$ (dersom dette er sant - hvilket det er).

For å bevise dette påstår vi først at

$$s_m = \frac{1 - r^{m+1}}{1 - r}$$

(dette kan bevises ved induksjon, men vi hopper over det nå). Så regner vi ut $s - s_m$

$$s - s_m = \frac{1}{1-r} - \frac{1 - r^{m+1}}{1 - r} = \frac{r^{m+1}}{1 - r}$$

Velg en k sånn at $|r|^k < (1 - r)$. Da har vi

$$|s - s_m| \leq \frac{|r|^k \cdot |r|^{m-k}}{1 - r} < |r|^{m-k}$$

Velg N slik at $|r|^{N-k} < \epsilon$. For $m \geq N$ har vi da at

$$|s - s_m| < |r|^{m-k} \leq |r|^{N-k} < \epsilon$$

Definisjon 7.1. (2.4.3.) Vi ser nå på en generell rekke (7.1). Vi definerer den *m'te delsummen* til rekka til å være

$$s_m = \sum_{n=0}^{m} a_m$$

Vi sier at rekka er *konvergent* dersom følgen $\{s_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ er konvergent.

Definisjon 7.2. Vi sier at en rekke (7.1) er *absolutt konvergent* dersom

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$$

er konvergent.

For å avgjøre om en rekke er konvergent kan vi nå bruke teorien om følger. For eksempel er $\{s_m\}$ konvergent hvis og bare hvis den er en Cauchy-følge; altså er en rekke konvergent hvis og bare hvis $\{s_m\}$ er en Cauchy-følge. Det vil si, for hver $\epsilon > 0$ fins $N \in \mathbb{N}$ slik at for alle $k > l \geq N$ så har vi

$$|s_k - s_l| < \epsilon \Leftrightarrow |a_{l+1} + a_{l+2} + \cdots + c_k| < \epsilon \tag{7.4}$$

(Se Teorem 2.7.2. i boka.)

En veldig nyttig observasjon er at siden vi ved trekantulikheten har at

$$|a_{l+1} + a_{l+2} + \cdots + c_k| \leq |a_{l+1}| + |a_{l+2}| + \cdots + |c_k|$$

så følger det at

Teorem 7.3. *(2.7.6.) En absolutt konvergent rekke er konvergent.*

Dermed er det velig nyttig å finne kriterier for at rekker (7.1) der vi har $a_n \geq 0$ for alle n er positive, konvergerer. Slike rekker kalles *positive rekker*.

Teorem 7.4. *La $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ være en positiv rekke. Anta at det fins $M > 0$ slik at $s_m \leq M$ for alle m. Da er rekka konvergent.*

Oppgave 7.5. Vis at s_m konvergerer mot $\sup\{s_m\}$.

Teorem 7.6. *La $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ og anta at $0 \leq |a_n| \leq M_n$ der $\sum_{n=0}^{m} M_n \leq M$ for alle m. Da er rekka konvergent.*

Oppgave 7.7. La $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ være en rekke og anta at det fins $0 < r < 1$ og $K > 0$ sånn at $|a_n| \leq Kr^n$ for alle n. Da er rekka konvergent.

7.2. **Betinget konvergens og alternerende rekker.** En konvergent rekke som ikke er absolutt konvergent kalles *betinget konvergent*. Se for eksempel på rekka

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

Denne er *ikke* absolutt konvergent, da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ (dette har vi sett i Kaptittel 2). Men se nå på $s_k - s_l, k > l$

$$\begin{aligned} |s_k - s_l| &= |\frac{(-1)^{l+1}}{l+1} + \cdots + \frac{(-1)^k}{k}| \\ &= (\frac{1}{l+1} - \frac{1}{l+2} + \frac{1}{l+3} - \frac{1}{l+4} + \cdots) \leq \frac{1}{l+1} \end{aligned}$$

Så hvis $\frac{1}{N+1} < \epsilon$ og $l, k \geq N$ så har vi $|s_k - s_l < \epsilon$. Så $\{s_m\}$ er en Cauchy-følge og dermed konvergent.

Definisjon 7.8. La $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ være en rekke. Vi sier at rekka er *alternerende* dersom $a_n = (-1)^n b_n, b_n \geq 0$, for alle n, eller $a_n = (-1)^{n+1} b_n, b_n, \geq 0$ for alle n.

Et argument som likner det over gir at

Teorem 7.9. *(2.7.7.) La $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ være en alternerende rekke med $|a_{n+1}| < |a_n|$ for alle n. Da har vi for $k > l$ at*

$$|s_k - s_l| \leq |a_{l+1}|$$

Spesielt har vi at dersom $a_n \to 0$ når $n \to \infty$ så er rekka konvergent.

Fikser nå en $x \in (-1, 1)$. Vi ser på rekka

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n}$$

Siden $|\frac{(-x)^n}{n}| < |x|^{-n}$ har vi at rekka konvergerer for alle $x \in (-1, 1)$. Dermed kan vi oppfatte dette som en rekke av funksjoner $h_n(x) = \frac{(-x)^n}{n}$, og denne rekken konvergerer mot en funksjon $f(x)$.

Videre, ved Teorem 7.9, er rekka konvergent også hvis vi setter $x = 1$. Dermed konvergerer rekka av funksjoner mot en funksjon

$$f : (-1, 1] \to \mathbb{R}$$

Hva vet vi om denne funksjonen? Er den kontinuerlig på $(-1,1)$? Er den kontinuerlig på $(-1,1]$)? Er den deriverbar på $(-1,1)$?

Disse tingene skal vi se nærmere på, men la oss nå anta at

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n}$$

er deriverbar på $(-1,1)$. Anta videre at

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (-1) \cdot \frac{(-x)^{n-1}}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x}$$

I så fall har vi at $f(x) = \log(1+x)$ for $x \in (-1,1)$.

Spørsmål: Er det da videre sant at $f(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \log(2)$?

7.3. **Rekker av funksjoner.** La $h_n : A \to \mathbb{R}$ være en funksjon for alle $n \in \mathbb{N}$. En *rekke* av funksjoner er et uttrykk på formen

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} h_n$$

Vi mener med dette at for hver $x \in A$ så har vi $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n(x)$ - dersom dette gir mening. For hver fikserte x er altså $f(x)$ en rekke i kjent forstand fra Kapittel 2

Den k'te *delsummen* til rekka er definer ved

$$f_k = \sum_{n=0}^{k} h_n$$

slik at $\{f_k\}$ er en følge av funksjoner definert på A. Vi sier at rekka konvergerer *punktvis* dersom $f_k(x)$ konvergerer for alle x og at rekka konvergerer *uniformt* hvis f_k konvergerer uniformt.

Eksempel 7.10. La $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være definert ved $h_n(x) = x^n$. Da har vi at

$$f_k(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^k$$

Oppgave 7.11. Vis at $f_k(x)$ ikke konvergerer for noen x med $|x| \geq 1$.

For $|x| < 1$ vet vi fra tidligere at

$$f_k(x) = \frac{1-x^{k+1}}{1-x} \ \& \ f_k(x) \underset{k\to\infty}{\to} \frac{1}{1-x} =: f(x)$$

For å avgjøre om konvergensen er punktvis eller uniform ser vi på $f - f_k$

$$f(x) - f_k(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{1-x^{k+1}}{1-x} = \frac{x^{k+1}}{1-x} \to \infty \text{ når } x \to 1^-$$

Så konvergensen er *ikke* uniform; den er tregere og tregere når x nærmer seg 1. Men konvergensen *er* uniform på enhver $A = [-a,a]$ der $0 \leq a < 1$.

Oppgave 7.12. Bevis dette.

Bemerkning 7.13. Det følger automatisk fra Teorem 6.5 at hvis $\sum_{n\in\mathbb{N}} h_n$ er en rekke av *kontinuerlige* funksjoner $h_n : A \to \mathbb{R}$, og hvis rekka konvergerer uniformt mot en funksjon $f : A \to \mathbb{R}$, så er f kontinuerlig.

Vi sier at en rekke $\sum_{n\in\mathbb{N}} h_n$ av funksjoner $h_n : A \to \mathbb{R}$ er *absolutt konvergent* dersom $\sum_{n\in\mathbb{N}} |h_n|$ er konvergent.

Oppgave 7.14. Bevis at dersom $f = \sum_{n\in\mathbb{N}} h_n$ er absolutt konvergent, så er f konvergent. Dersom $\sum_{n\in\mathbb{N}} |h_n|$ konvergerer uniformt så konvergerer $\sum_{n\in\mathbb{N}} h_n$ uniformt mot f.

Teorem 7.15. *La $h_n : A \to \mathbb{R}$ være funksjoner for $n \in \mathbb{N}$ og anta at $|h_n(x)| \leq M_n$ for alle $x \in A$, der $\sum_{n\in\mathbb{N}} M_n < \infty$. Da konvergerer rekka $\sum_{n\in\mathbb{N}} h_n$ uniformt og absolutt.*

7.4. **Potensrekker.** Inspirert av eksempelet over definerer vi nå *potensrekker* som rekker

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n \cdot x^n, c_n \in \mathbb{R}$$

Disse kan sees på som generaliseringer av polynomer, for hvilke alle a_n'ene bortsett fra endelig mange er null. I motsetning til for polynomer konvergerer ikke slike rekker nødvendigvis for alle x (det har vi allerede sett over).

Mange funksjoner vi kjenner fra før er gitt ved potensrekker; slike funksjoner er mye mer "regulære" enn generelle deriverbare, eller til og med uendelig ganger deriverbare, funksjoner. For eksempel har vi

$e^x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^n}{n!}$ for alle $x \in \mathbb{R}$
$\cos(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ for alle $x \in \mathbb{R}$
$\sin(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ for alle $x \in \mathbb{R}$

Disse funksjonene er eksempler på hva man kaller *reell analytiske funksjoner*.

Teorem 7.16. *La $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n x^n$ være en potensrekke. Anta at det fins $b > 0$ slik at $\{c_n b^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ er begrenset. Da konvergerer potensrekka absolutt og uniformt på ethvert intervall $[-a, a]$ med $0 \leq a < b$; spesielt er f kontinuerlig på $[-a, a]$ og rekka konvergerer uniformt mot f.*

Bemerkning 7.17. For en potensrekke $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n x^n$ som konvergerer på et intervall $(-a, a)$ har vi at f er deriverbar, og

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} \text{ på } (-a, a)$$

Videre er f er integrerbar på $(-a, a)$, og hvis $g' = f$ har vi at

$$g(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1} + \widehat{c}_0, \widehat{c}_0 \in \mathbb{R}$$

I denne forstand kan vi altså manipulere potensrekker som vi manipulerer polynomer.

7.5. **Prosjekt 8.**

Oppgave 1

I denne oppgaven skal vi vise Teorem 7.3.

Teorem 7.18. *(2.7.6.) En absolutt konvergent rekke er konvergent.*

Oppgave 2

I denne oppgaven skal vi bevise Teorem 7.4

Teorem 7.19. *La $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ være en positiv rekke. Anta at det fins $M > 0$ slik at $s_m \leq M$ for alle m. Da er rekka konvergent.*

Oppgave 3

I denne oppgaven skal vi bevise Teorem 7.15

Teorem 7.20. *La $h_n : A \to \mathbb{R}$ være funksjoner for $n \in \mathbb{N}$ og anta at $|h_n(x)| \leq M_n$ for alle $x \in A$, der $\sum_{n\in\mathbb{N}} M_n < \infty$. Da konvergerer rekka $\sum_{n\in\mathbb{N}} h_n$ uniformt og absolutt.*

Oppgave 4

I denne oppgaven skal vi bevise Teorem 7.16

Teorem 7.21. *La $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n x^n$ være en potensrekke. Anta at det fins $b > 0$ slik at $\{c_n b^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ er begrenset. Da konvergerer potensrekka absolutt og uniformt på ethvert intervall $[-a, a]$ med $0 \leq a < b$; spesielt er f kontinuerlig på $[-a, a]$ og rekka konvergerer uniformt mot f.*

Oppgave 5

I denne oppgaven skal vi se på rekken av funksjoner

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n}$$

Vi kommer til å få bruk for flere resultater fra dette kapittelet.

(a) Bevis at $f(x)$ eksisterer på $(-1, 1)$ og er kontinuerlig på $(-1, 1)$.

Påstand: Vi har at $f(x) = \log(1 + x)$ for $x \in (-1, 1)$ (vi aksepterer det uten bevis; se eventuelt i boka).

(b) Bevis at $f(1)$ eksisterer.

(c) Bevis at f konvergerer uniformt på $[0, 1]$.

(d) Bevis at $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \log 2$.

References

1. Abbott, Stephen; Understanding Analysis. Undergrad. Texts Math. Springer, New York, 2015, xii+312 pp. ISBN: 978-1-4939-2711-1; 978-1-4939-2712-8

E. F. Wold: Department of Mathematics, University of Oslo, Postboks 1053 Blindern, NO-0316 Oslo, Norway

Email address: erlendfw@math.uio.no