MAT2100 - ELEMENTÆR REELL ANALYSE - VÅR 2026

E. F. WOLD

Om kurset

Vi flger boken "Understanding Analysis"av S. Abbott [1].

Kurset består av sju prosjektoppgaver som kan leveres inn for tilbakemelding innen gitte frister (i Canvas), samt relevant bakgrunnsstoff som gjennomgås på"forelesninger". Det blir lagt opp til mye diskusjoner og veiledet arbeid med oppgavene under "forelesningene". Minst tre oppgaver må være godkjent for å kunne gå opp til eksamen, men vi anbefaler å jobbe med og levere inn alle. Oversikt over bakgrunnsstoff og prosjektoppgaver finner du i dette dokumentet.

Vi har satt av to uker til hvert delprosjekt. Stoff som er *planlagt* gjennomgått de respektive ukene finner du i seksjonene under; de oppdateres underveis i semesteret, i forkant. Stoff som dekkes med utspring i diskusjoner under "forelesningene" legges inn i etterkant.

To tredjedeler av eksamen - som er muntlig - vil best av gjre rede for et utvalg av disse oppgavene. Oppgavene trekkes tilfeldig av studenten selv, og det gis en time til forberedelse til selve hringen. Resten av eksamen vil dreie seg om tilleggsstoff spesifisert i denne pdf'en, i forkant av hver 2-ukers-bolk; diverse, definisjoner og setninger.

1. Reelle tall, uke 4&5, kapittel 1 i Abbott

Anbefalte forberedelser: Les 1.1 "Discussion: The Irrationality of $\sqrt{2}$".

Diverse:

(*i*) *Kvadratroten av* 2 *er irrasjonal; vi "trenger" flere tall enn de rasjonale.* (Se 1.1.)
(*ii*) *Desimalutvikling av* $\sqrt{2}$.
(*iii*) *Desimalutvikling av relle tall.*

Definisjoner:

(1.3.2.) *Minste øvre skranke.*
(1.5.1.) *Funksjoner som er "en-til-en" og "på".*
(1.5.2.) *Kardinalitet.*
(1.5.5.) *Tellbare og ikke-tellbare mengder.*

Setninger:

(1.4.1.) *Avtagende kjeder av intervaller*

Date: March 23, 2026.

(1.4.3.) *Vi har at* $\mathbb{Q}$ *er tett i* $\mathbb{R}$.
(1.5.6.) *Vi har at* $\mathbb{Q}$ *er tellbar mens* $\mathbb{R}$ *er ikke-tellbar.*
(1.6.1.) *Det åpne intervallet* $(0,1)$ *er ikke-tellbart.* (Prosjektoppgave)

Oppgaver til innlevering:

(1.6.1.) Oppgave 1.6.1.
(1.6.2.) Oppgave 1.6.2.
(1.6.3.) Oppgave 1.6.3.
(1.6.4.) Oppgave 1.6.4.

Ekstraoppgave 1: Oppgave 1.4.8.

Ekstraoppgave 2: La $\{I_\alpha\} = \{(a_\alpha, b_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ være en samling åpne intervaller der A er en *indeksmengde*; det vil si $a_\alpha < b_\alpha$ for alle α. Anta at $I_\alpha \cap I_\beta = \emptyset$ for $\alpha \neq \beta$. Vis at A er tellbar.

FORELESNINGSNOTATER - KAPITTEL 1

Forelesningsnotatene er ikke ment å erstatte boken eller det å gåpå forelesning. De er skrevet for å få en grei oversikt over stoffet, og dels som mine egne forelesningsnotater.

Notatene for Kapittel 1 er spesielt knappe, da de originale notatene var hndskrevne og ikke egnet for kringkasting. Detaljer fins stort sett i bokens Kapittel 1 - se definisjoner og setninger referert til over.

1.1. **Reelle tall.** Vi antar at vi er kjent med tallsystemet $\mathbb{Q}$. De *reelle* tallene $\mathbb{R}$ utgjør en utvidelse av tallsystemet $\mathbb{Q}$. Alle algebraiske egenskaper og ordens-egenskaper ved $\mathbb{Q}$ vedvarer, men $\mathbb{R}$ har den viktige tilleggsegenskapen:

Kompletthetsaksiomet. Enhver oppad begrenset mengde $A \subset \mathbb{R}$ har en *minste øvre skranke* $s \in \mathbb{R}$ [1] som vi også betegner med $s = \sup A$.

Som en anvendelse tvinges det frem eksistensen av et tall $s \in \mathbb{R}$ med egenskapen $s^2 = 2$, mens vi har sett at det ikke fins noen $r \in \mathbb{Q}$ med $r^2 = 2$; altsåhar vi $s \notin \mathbb{Q}$. Eksistensen av en slik s følger av åbetrakte mengden

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\}$$

Faktisk tvinger kompletthetsaksiomet frem eksistensen av så mange *irrasjonale tall* at mengden $\mathbb{Q}$ på flere måter kan sies å være veldig liten i forhold til mengden $\mathbb{R}$. En måte å uttrykke at $\mathbb{Q}$ er "mindre" enn $\mathbb{R}$ på er temaet for den første prosjektoppgaven i kurset. Siden det antagelig ikke er opplagt hva det vil si at en uendelig mengde er større eller mindre enn en annen uendelig mengde, innfører vi begrepene *kardinalitet* og *tellbarhet* (se definisjoner 1.5.1., 1.5.2. og 1.5.5.). Konklusjonen vil bli at $\mathbb{Q}$ ikke har samme kardinalitet som $\mathbb{R}$, og at $\mathbb{Q}$ er tellbar mens $\mathbb{R}$ ikke er det.

Desimalutvikling av reelle tall. Ethvert reellt tall a har en *desimalutvikling*

$$a = n.a_1a_2a_3a_4 \cdots a_k \cdots \text{ (for eksempel } 1.4142 \cdots) \tag{1.1}$$

[1] Et tall $\tilde{s} \in \mathbb{R}$ er en *øvre skranke* for A dersom $x \leq \tilde{s}$ for alle $x \in A$; mengden A er *oppad begrenset* dersom det fins en øvre skranke for A. En øvre skranke s er en *minste øvre skranke* dersom $s \leq \tilde{s}$ for alle øvre skranker $\tilde{s}$.

der $n \in \mathbb{Z}$ og $a_k \in \{0, 1, ..., 9\}$ for $k = 1, 2, 3, \cdots$. Vi kan "nesten" identifisere mengden av reelle tall med mengden av desimalutviklinger (1.1), men vi må være oppmerksomme på at et reelt tall kan ha to ulike desimalutviklinger; for eksempel har vi

$$1/2 = 0.5000 \cdots = 0.49999 \cdots$$

Dette er imidlertid det eneste som kan skape problemer; to forskjellige desimalutviklinger a og b uttrykker det samme reelle tallet hvis og bare hvis

$$a = n.000 \cdots \text{ og } b = (n-1).999 \cdots$$

eller

$$a = n.a_1a_2a_3a_4 \cdots a_{k-1}a_k000 \cdots \text{ og } b = n.a_1a_2a_3a_4 \cdots a_{k-1}(a_k - 1)999$$

eller bytt om a og b.

For å forståmer nøyaktig hva en desimalutvikling av et reelt tall er, må vi foregripe begivenhetene i kurset (se Kapittel 2) og snakke om *utendelige rekker*. For eksempel har vi at

$$\begin{aligned} 1/2 &= 5 \cdot \frac{1}{10} + 0 \cdot \frac{1}{100} + 0 \cdot \frac{1}{1000} + 0 \cdot \frac{1}{10000} + \cdots = 5 \cdot \frac{1}{10} + \sum_{k=2}^{\infty} 0 \cdot (\frac{1}{10})^k \\ &= 4 \cdot \frac{1}{10} + 9 \cdot \frac{1}{100} + 9 \cdot \frac{1}{1000} + 9 \cdot \frac{1}{10000} + \cdots = 4 \cdot \frac{1}{10} + \sum_{k=2}^{\infty} 9 \cdot (\frac{1}{10})^k \end{aligned}$$

eller for en generell $x \in \mathbb{R}$

$$x = n + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot (\frac{1}{10})^k, a_k \in \{0, 1, ..., 9\} \tag{1.2}$$

På denne måten indikerer vi at reelle tall bør tenkes påsom en *uendelige prossesser* av tilnærminger. Det hører med til sjeldenhetene at et tall $x \in \mathbb{R}$ har en representasjon (1.2) der vi kan finne noe som helst system i $a_k$ene (som for eksempel at uendelig mange er null eller at uendelig mange er ni).

2. Følger og rekker, uke 6&7, kapittel 2 i Abbott

Anbefalte forberedelser: Les 2.1 "Discussion: Rearrangement of infinite series."

Diverse:

(*i*) Zenon's paradoks.
(*ii*) Geometriske rekker.
(*iii*) Harmonisk og alternerende harmonisk rekke.

Definisjoner:

(2.2.1.) *Følger.*
(2.2.3.) *Konvergens av følger.*
(2.2.9.) *Divergens av følger.*
(2.3.1.) *Begrensete følger.*
(2.4.1.) *Monotone følger.*
(2.6.1.) *Cauchy-følger.*
(0.0.0.) *Fra prosjektoppgave:* $\limsup$

Setninger:

(2.3.2.) *Konvergente følger er begrensede.*
(2.4.2.) *Begrensede monotone følger er konvergente.*
(2.6.4.) *En følge er konvergent hvis og bare hvis den er Cauchy.*
(2.7.2.) *Cauchy-kriterium for rekker.*
(2.7.3.) *En konvergent rekke har ledd som går mot null.*
(2.7.6.) *En absolutt konvergent rekke konvergerer.*

Oppgaver til innlevering: Se slutten av "FORELESNINGSNOTATER - KAPITTEL 2"

FORELESNINGSNOTATER - KAPITTEL 2

Forelesningsnotatene er ikke ment å erstatte boken eller det å gåpå forelesning. De er skrevet for å få en grei oversikt over stoffet, og dels som mine egne forelesningsnotater.

Akilles og skilpadden - Zenon's paradoks Følgende skal være et av Zenon's argumenter (ca. 450 f.Kr.) for at *bevegelse* er umulig. Han skal ha tatt sin læremester Paramenides i forsvar, som påstått hevdet at *forandring* ikke eksisterer. I hvilken forstand vi skal ta dette alvorlig er kanskje uklart.

Uansett, den berømte olympiske mester i det gamle Hellas, Akilles, skal løpe om kapp med en skilpadde. Siden Akilles løper dobbelt så fort som skilpadden, får skilpadden et forsprang på en kilometer. Påstanden er at Akilles aldri kan løpe forbi skilpadden. For når Akilles har løpt en kilometer, har skilpadden løpt en halv kilometer til; når Akilles har løpt en halv kilometer til så har skilpadden løpt en kvart kilometer til, og såvidere. Dette er en uendelig prosess, og altså vil skilpadden alltid ligge foran; Akilles kan ikke løpe forbi skilpadden. Mange vil si at dette opplagt ikke er riktig.

La oss si at skilpadden løper en kilometer i timen. I løpet av $N \geq 1$ steg har skilpadden da løpt

$$s_N = 1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \cdots + (1/2)^{N-1}$$

kilometer, og bruker

$$t_N = 1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \cdots + 1/2^{N-1}$$

timer. I løpet av de samme stegene har Akilles løpt

$$a_N = 1 + 1/2 + 1/4 + \cdots + 1/2^{N-2}$$

kilometer (dersom $N \geq 2$ - han står stille i steg 1), og ogsåbrukt t_N timer.

Påstand:

$$s_N = \frac{1-(1/2)^N}{1-1/2} \text{ (og } a_N = \frac{1-(1/2)^{N-1}}{1-1/2})$$

Påstanden er sann for $N = 1$ - det kan vi sjekke direkte. Anta så at påstanden er sann for en gitt N. Vi har da

$$s_{N+1} = S_N + (1/2)^N = \frac{1-(1/2)^N}{1-1/2} + (1/2)^N = \frac{1-(1/2)^N}{1-1/2} + \frac{(1/2)^N(1-(1/2))}{1-1/2} = \frac{1-(1/2)^{N+1}}{1-1/2},$$

som viser at påstanden er sann for $N+1$. Vi konkluderer med at påstanden er sann for elle N[2]. Vi ser altså at når antall steg N i prosessen blir større og større så nærmer s_N og a_N seg

$$\frac{1}{1-1/2},$$

men a_N er alltid litt mindre enn s_N; $s_N - a_N = (1/2)^{N-1}$. Så argumentet sier bare at Akilles ikke kan løpe forbi skilpadden før de har løpt to kilometer, og det har gått to timer.

Den såkalte *rekken* $\sum_{n=1}^{\infty}(1/2)^{n-1}$ er et eksempel på en såkalt *geometrisk rekke*. Mere generelt, dersom $0 \leq r < 1$ har vi at

$$s_N = \sum_{n=1}^{N} r^{n-1} = \frac{1-r^N}{1-r} \text{ og videre } s = \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} = \frac{1}{1-r} \tag{2.1}$$

(Her referer bruken av bostaven s til en *sum* snarere enn *skilpadde*.)

Oppgave 2.1. Bevis formelen for s_N ved såkalt *induksjon* som ved den konkrete rekka med $r = 1/2$ over.

Eksempel 2.2. Vi ser på et eksempel meddesimaltall. Vi har

$$0.99999.... = \sum_{n=1}^{\infty} 9 \cdot (1/10)^n = \frac{9}{1-(1/10)} - 9 = 1 \tag{2.2}$$

[2]Hvis ikke må det finnes en minste N slik at påstanden er falsk. Vi må da ha at $N \geq 2$ (hvorfor?). Da er påstanden sann for $N-1$ som impliserer at påstanden er sann for N. Dette er en motsigelse; det medfører en absurditet åpåstå at påstanden kan være falsk for en eller annen N.

Selv om vi nåkanskje tror at høyresiden i (2.1) (samt (2.2)) er "riktig" har vi ikke egentlig vært presise påhva det egentlig betyr. Det vi mener er følgende. For enhver (liten) $\epsilon > 0$ så finnes an $M \in \mathbb{N}$ slik at

$$|s_N - \frac{1}{1-r}| < \epsilon \text{ når } N \geq M \tag{2.3}$$

Mengden $\{s_N\}_{N=1}^{\infty}$ er et eksempel på det vi kaller en *følge* og hver enkelt s_N kalles en *partiell sum* til *rekken* $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$. Vi sier at følgen $\{s_N\}_{N=1}^{\infty}$ *kovergerer mot* eller *er lik* $\frac{1}{1-r}$.

I den geometriske rekka over ser vi at leddene r^n går mot null (raskt). Vi må imidlertig være forsiktige når vi har ågjøre med rekker med ledd som går mot null.

Eksempel 2.3. Vi ser på

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$$

Dette kalles den *harmoniske rekka*. Er det ogsåtilfelle at denne rekka konvergerer mot et reelt tall? Det er ikke så godt å se direkte, men vi kan strukturere rekka og gjøre et overslag (se [1], side 58).

$$\begin{aligned} s_{2^k} &= 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}) + \cdots + (\frac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^k}) \\ &> 1 + k \cdot \frac{1}{2} \underset{k\to\infty}{\to} \infty \end{aligned}$$

Det vi mener med at $s_{2^k} \to \infty$ er at for enhver $M > 0$ fins $N \in \mathbb{N}$ slik at $s_{2_k} \geq M$ når $N > M$. Dersom vi modfiserer rekka over får vi et helt annet resultat.

Eksempel 2.4. Vi hevder at

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot (1/n) = \log(2) \tag{2.4}$$

Vi kan sjekke (med kalkulator) at dette kan virke rimelig

$$1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 - 1/6 + 1/7 = 0.75952381$$

$$1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 - 1/6 + 1/7 - 1/8 + 1/9 - 1/10 = 0.64563492$$

$$1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \cdots + 1/27 - 1/28 + 1/29 - 1/30 = 0.67675814$$

og $\log 2 = 0.69314718$. Det ser altså ut som påstanden kan være riktig men *konvergensen* er i så fall ganske treg.

2.1. **Følger og rekker.**

Definisjon 2.5. (2.2.1) La A være en mengde. En *følge* av elementer i A er en funksjon $f : \mathbb{N} \to A$. Vi kan skrive en slik følge som $\{f(0), f(1), f(2), ...\} = \{x_0, x_1, x_2, ...\} = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Dersom $A = \mathbb{R}$ vil vi si at vi har ågjøre med en følge av reelle tall, og bruker vi kun begrepet følge, mener vi her en følge av reelle tall. Mer generelt vil vi si at en funksjon $f : \{-k, -k + 1, ..., 0, 1, 2, 3, ...\} \to A$ også er en følge, og vi betegner den gjerne med $\{a_n\}_{n=-k}^{\infty}$. Dersom vi definerer $b_n = a_{n-k}$ blir følgen $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en følge som opprinnelig definert, og vi uformelt kan vi oppfatte de to følgende som like.

Definisjon 2.6. (2.2.3) La $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ være en følge. Vi sier at følgen *konvergerer* mot $a \in \mathbb{R}$ dersom det for enhver $\epsilon > 0$ finnes $N \in \mathbb{N}$ slik at $|a_n - a| < \epsilon$ når $n \geq N$.

Eksempel 2.7. La $a \in \mathbb{R}$ være et irrasjonalt tall. Vi vet at for enhver $n \in \mathbb{N}$ så fins et rasjonalt tall $r_n = p_n/q_n, p_n, q_n \in \mathbb{Z}, q_n > 0$, sånn at $|r_n - a| < 1/n$. Da har vi $r_n \to a$ nå $r_n \to \infty$. For dersom $\epsilon > 0$ kan vi velge $N \in \mathbb{N}$ slik at $N > 1/\epsilon$, så for $n \geq N$ har vi

$$|r_n - a| < 1/n \leq 1/N < \epsilon$$

Definisjon 2.8. (2.2.9) En følge som ikke er konvergent sies å være *divergent*.

Definisjon 2.9. (2.3.1) En følge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sies å være *begrenset* dersom det fins $M \geq 0$ slik at $|a_n| \leq M$ for alle n. En slik M kalles en *begrensning* for følgen.

Teorem 2.10. *(2.3.2) Enhver konvergent følge $\{a_n\}$ er begrenset.*

Bevis: La a betegne grensen til følgen. Da fins $N \geq 0$ slik at $|a_n - a| \leq 1$ når $n \geq N$; det følger at $|a_n| \geq |a| + 1$. Vi kan sette

$$M = \max\{|a_1|, ..., |a_{N-1}|, |a| + 1|\}$$

□

Definisjon 2.11. (2.4.1) Vi sier at en følge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ er *voksende* (resp. *avtagende*) dersom $a_n \leq a_{n+1}$ (resp. $a_n \geq a_{n+1}$) for alle n. Slike følger sies å være *monotone*.

Teorem 2.12. *(2.4.2) Enhver monoton begrenset følge er konvergent.*

Bevis: Vi antar at $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ er voksende og begrenset, tilfellet med avtagende følger er analogt. La $s = \sup\{a_n\}$, det vil si at $a_n \leq s$ for alle n, og dersom M er en begrensning for følgen har vi at $s \leq M$. For hver $\epsilon > 0$ fins da en N slik at $s - \epsilon < a_N \leq s$ (hvorfor?). Det følger da at $a_N \leq a_n \leq s$ for alle $n \geq N$. □

Resultatet følger altsåav kompletthetsaksiomet for de reelle tall; den tilsvarende påstanden ville være usann i tallsystemet $\mathbb{Q}$. Som vi har diskutert konvergerer ikke følgen

$$a_0 = 1.4, a_1 = 1.41, a_2 = 1.414, a_3 = 1.4142, \cdots$$

til noe tall i $\mathbb{Q}$ (følgen kommer fra desimalutviklingen av $\sqrt{2}$).

Definisjon 2.13. (2.6.1) En følge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ er en *Cauchy-følge* dersom det for alle $\epsilon > 0$ fins en $N \in \mathbb{N}$ slik at $|a_n - a_m| < \epsilon$ for $n, m \geq N$.

Oppgave 2.14. Vis at $\{1/n\}_{n=1}^{\infty}$ er en Cauchy-følge.

Oppgave 2.15. Vis at $\{(-1)^n\}_{n=0}^{\infty}$ ikke er en Cachy-følge.

Vi avslutter med en definisjon vi kommer til å få bruk for senere.

Definisjon 2.16. (2.5.1) La $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ være en følge, og la

$$n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_k < \cdots$$

være en følge av naturlige tall. Følgen

$$\{a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \cdots, a_{n_k}, \cdots\} = \{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$$

sies å være en *delfølge* av $\{a_n\}$ og betegnes med $\{a_{n_k}\}$.

Oppgave 2.17. La $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ være en følge som konvergerer mot $a \in \mathbb{R}$. Dersom $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ er en delfølge, så konvergerer den også mot a.

Oppgave 2.18. Se på Eksempel 2.7. Vis at $q_n \to \infty$ når $n \to \infty$.

2.2. **Prosjekt 2.**

Oppgave 1 Gi et eksempel på en Cauchy-følge som ikke er monoton.

Oppgave 2 Bevis at enhver konvergent følge er en Cauchy-følge.

Oppgave 3 La $\{a_n\}$ være en begrenset følge. Vis at følgen definert ved

$$y_n = \sup\{a_k : k \geq n\}$$

konvergerer. Vi definerer $\limsup\{a_n\}$ ved

$$\limsup\{a_n\} = \lim_{n\to\infty} y_n$$

Oppgave 4 La $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ være følgen definert ved $a_n = (-1)^n(1/n)$. Finn $\sup\{a_n\}$ og $\limsup\{a_n\}$.

Oppgave 5 La $\{a_n\}$ være en begrenset følge. Vis at for enhver $\epsilon > 0$ og $N \in \mathbb{N}$ så fins $n \geq N$ med $|a_n - \limsup\{a_n\}| < \epsilon$.

Oppgave 6 Bevis Teorem 2.6.4 som følger (alternativt til boka). Anta at $\{x_n\}$ er en Cauchy-følge. Ved Lemma 2.6.3 er følgen begrenset. Ved Oppgave 3 eksisterer $s = \limsup\{x_n\}$. Vis at $\lim_{n\to\infty} x_n = s$.

Vi skal nå se videre på *rekker* - det vil si uttrykk påformen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ med $a_n \in \mathbb{R}$. Vi har allerede sett flere eksempler - repeter gjerne introduksjonen over. For $n \in \mathbb{N}$ lar vi s_N betegne den $n$te delsummen $s_N = \sum_{n=0}^{N} a_n$. Da er $\{s_N\}$ en følge, og vi sier at rekka konvergerer

dersom denne følgen konverger. Videre sier vi at rekka er *absolutt konvergent* dersom $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergerer.

Oppgave 7 (Teorem 2.7.3) Anta at $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ er konvergent. Vis at $a_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Er det motsatte tilfelle?

Oppgave 8 La $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ være en absolutt konvergent rekke. Vis at $\{s_N\}$ er en Cauchy-følge, og dermed at rekka er konvergent.

Oppgave 9 (Bonus-oppgave) La $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ være en absolutt konvergent rekke, og la $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ være en omorganisering (se Abbott [1], side 75) av rekka. Vis at

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

3. Grunnleggende topologi på$\mathbb{R}$, uke 8&9, kapittel 3 i Abbott

Anbefalte forberedelser: Les 3.1 "Discussion: The Cantor Set."

Diverse:

(i) Cantor-mengden (3.1)

Definisjoner:

(3.2.1.) Åpne mengder.
(3.2.4.) Grensepunkt.
(3.2.6.) Isolert punkt.
(3.2.7.) Lukket mengde.
(3.3.1.) Kompakte mengder.
(3.5.1.) F_σ- og G_δ-mengder.

Setninger:

(3.2.3.) Unioner og snitt av åpne mengder.
(3.2.5.) Karakterisering av grensepunkter.
(3.2.13.) Åpne/lukkete mengder og komplementer.
(3.2.14.) Unioner og snitt av lukkete mengder.
(3.3.4.) Karakterisering av kompakte mengder.
(3.5.2.) Baire's teorem 1.
(3.5.4.) Baire's teorem 2.

Oppgaver til innlevering: Se slutten av "FORELESNINGSNOTATER - KAPITTEL 3"

FORELESNINGSNOTATER - KAPITTEL 3

Forelesningsnotatene er ikke ment å erstatte boken eller det å gåpå forelesning. De er skrevet for å få en grei oversikt over stoffet, og dels som mine egne forelesningsnotater.

3.1. **Cantor-mengden.** (3.1)
Vi skal definere en delmengde C av $[0,1]$ med svært spesielle egenskaper sett sammen:

(i) C har samme kardinalitet som $\mathbb{R}$.
(ii) De eneste "sammenhengende delene" av C er punkter (vi sier at C er *totalt usammenhengende*).
(iii) For hvert punkt $x \notin C$ så fins et intervall (a,b) med $x \in (a,b)$ og $(a,b) \cap C = \emptyset$ - vi sier at C er *lukket*.
(iv) C har "lengde" lik null.
(v) C har "dimensjon" lik $\log 2/\log 3 \approx 0.631$

Vi starter med å definere $C_0 = [0,1]$. Deretter setter vi

$$C_1 = C_0 \setminus (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$$

Generelt definerer vi

$$C_n = C_{n-1} \setminus (\bigcup_{k=1}^{3^n-2} (\frac{3^n-k-1}{3^n}, \frac{3^n-k}{3^n}))$$

For å fåen et bedre bilde av hva som skjer kan det lønne seg ådefinere disse mengdene induktivt. Anta at vi har konstruert disjunkte lukkete intervaller $I_{nk} \subset [0,1], k = 1, ..., 2^n$, hvert med bredde 3^{-n}, og sett $C_n = \cup_{k=1}^{2^n} I_{nk}$. C_1 er som konstruert over. Konstruer intervaller $I_{(n+1)k}$ ved å dele hvert intervall I_{nj} i to ved åfjerne den midtre åpne tredelen av intervallet. Sett $C_{n+1} = \cup_{k=1}^{2^{n+1}} I_{(n+1)k}$. Til slutt setter vi

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \bigcap_{n=m}^{\infty} C_n, m \geq 1$$

La oss se påpåstandene vi startet med.

(*i*) Vi har at det er en $1-1$ korrespondanse mellom C og mengden S av a'er

$$a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}, a_n \in \{0,1\};$$

en gitt a gir oss en avtagende kjede av intervaller $\{I_{nk}\}$ der $a_n = 0$ betyr venstre og $a_n = 1$ betyr høyre, hvert med lengde$(I_{nk}) = 3^{-n}$. Fra Kapittel 1 vet vi at $\cap I_{nk}$ er ikke-tomt og eneste mulighet er at det er et enkelt punkt. Vi vet at S har samme kardinalitet som $\mathbb{R}$.

(*ii*) De eneste "sammenhengende delene" av C er punktene fra (i). Dersom (a,b) er et intervall har vi at $b-a > 3^{-n}$ for en stor nok n, så(a,b) kan ikke være inneholdt i C siden $C \subset C_n$.

(*iii*) For $x \notin C$ har vi at det fins n med $x \notin C_n$. Vi har at $[0,1] \setminus C_n$ består av intervaller (a,b), og at $C \subset C_n$.

(*iv*) Den totale lengden til $C_n = 2^n \cdot 3^{-n} = (\frac{2}{3})^n \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Eventuelt, den totale lengden til $[0,1] \setminus C_n = 1 - (\frac{2}{3})^n \underset{n\to\infty}{\to} 1$.

(*v*) Dette krever en liten diskusjon. Dersom vi multipliserer det en-dimensjonale intervallet $[0,1]$ med 3 ender vi opp med $3 = 3^1$ kopier intervallet; dersom vi multipliserer det to-dimensjonale kvadratet $[0,1] \times [0,1]$ med 3 ender vi opp med $9 = 3^2$ kvadrater; dersom vi multipliserer den tre-dimensjonale kuben $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ med 3 ender vi opp med $27 = 3^3$ kuber. Så det ser ut til at eksponenten n i 3^n gjenspeiler dimensjonen. Dersom vi multipliserer Cantor-mengden C med 3 ender vi opp med 2 kopier av C (hvorfor?). Så "dimensjonen" n "må" tilfredstille $2 = 3^n$, det vil si $n = \log 2 / \log 3$.

Bemerkning 3.1. Merk at dersom vi multipliserer Cantor-mengden C med 3^n såender vi opp med 2^n kopier av Cantor-mengden; multiplikasjon med 3^n definerer en $1-1$ avbilding mellom hver $C \cap I_{nk}$ og en translasjon av C. Med andre ord, overalt i C finner vi miniatyrversjoner av C selv; mengden C er det vi kaller *selv-similær*.

Oppgave 3.2. Konstruksjonen over kalles også Cantor's $\frac{1}{3}$-mengde. Konstruer en Cantor mengde $C_{\frac{1}{2}}$ der du i hvert skritt fjerner intervaller av lengde halvparten av de opprinnelige

intervallene, det vil si, du starter med åfjerne $(1/2 - 1/4, 1/2 + 1/4)$ fra $[0, 1]$, og så går videre. Er $C_{\frac{1}{2}}$ i noen forstand større eller mindre enn C?

3.2. **Åpne og lukkete mengder.** (3.2)

Åpne og lukkete mengder er generaliseringer av åpne og lukkete intervaller. De har følgende egenskaper (lag tegninger):

(*i*) Intervallet (a, b) har den egenskapen at for $c \in (a, b)$ så fins $\epsilon > 0$ med $(c-\epsilon, c+\epsilon) \subseteq (a, b)$

(*ii*) Intervallet $[a, b]$ har den egenskapen at for $c \notin [a, b]$ så fins $\epsilon > 0$ slik at $(c-\epsilon, c+\epsilon) \cap [a, b] = \emptyset$. En ekvivalent egenskap er at dersom $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [a, b]$ er en Cauchy-følge, såer grensen også i $[a, b]$.

Definisjon 3.3. En mengde $O \subset \mathbb{R}$ er *åpen* dersom det for alle $a \in O$ fins $\epsilon > 0$ slik at

$$V_\epsilon(a) := \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \epsilon\} \subseteq O$$

Eksempel 3.4. Mengden $\mathbb{R}$ selv er en åpen mengde. For enhver $a \in \mathbb{R}$ kan $\epsilon > 0$ være vilkårlig.

Eksempel 3.5. Den tomme mengden $\emptyset$ er en åpen mengde.

Eksempel 3.6. Et åpent intervall $(a, b) \subset \mathbb{R}$ er en åpen mengde. La $c \in (a, b)$, det vil si $c > a$ & $c < b$. Velg $\epsilon > 0$ slik at

$$0 < \epsilon < c - a \ \& \ 0 < \epsilon < b - c$$

For $x \in V_\epsilon(c)$ har vi per definisjon

$$c - \epsilon < x < c + \epsilon$$

og vi har

$$a < c - \epsilon < x < c + \epsilon < b$$

Eksempel 3.7. Et lukket intervall $[a, b]$ er ikke en åpen mengde. For eksempel inneholder enhver $V_\epsilon(a)$ punkter x med $x < a$; altså er ikke $V_\epsilon(a)$ inneholdt i $[a, b]$. Tilsvarende problem oppstår i punktet b.

Teorem 3.8. *(3.2.3) Vi har at:*

(*i*) *Enhver union av åpne mengder er åpen*

(*ii*) *Snittet av endelig mange åpne mengder er åpen*

Bevis: Vi starter med (i). La $\{U_\lambda\}$ være en samling åpne mengder for $\lambda \in \Lambda$ der Λ er en eller annen mengde (for konkrethet kan du tenke på$\lambda = \mathbb{N}$, men Λ trenger ikke være tellbar). Hvis x er med i unionen har vi $x \in U_\kappa$ for (minst) en κ. Siden U_κ er åpen fins $V_\epsilon(a) \subset U_\kappa$. Men da er $V_\epsilon(a)$ inneholdt i unionen av alle U_λ.

Vi viser (ii). Så vi antar at $x \in \cap_{j=1}^N U_j$, der U_j er åpen for hver j. For hver j fins da ϵ_j slik at

$$(x - \epsilon_j, x + \epsilon_j) \subset U_j$$

La så

$$\epsilon = \min\{\epsilon_1, ..., \epsilon_N\} > 0$$

Da er

$$V_\epsilon(x) = (x - \epsilon, x + \epsilon) \subset (x - \epsilon_j, x + \epsilon_j)$$

for alle j. Så $V_\epsilon(x) \subset \cap_{j=1}^N U_j$. □

Oppgave 3.9. Konstruer en samling $U_j, j \in \mathbb{N}$, slik at $\cap_{j=0}^{\infty} U_j$ ikke er en åpen mengde.

Definisjon (alternativ til boken): En mengde $A \subset \mathbb{R}$ er *lukket* dersom komplementet A^c er åpent (en ekvivalent, men litt mer komplisert, definisjon er gitt i Definisjon 3.18; se ogsåOppgave 3.21).

Eksempel 3.10. Et lukket intervall $[a, b]$ er en lukket mengde; vi har at

$$[a, b]^c = (-\infty, a) \cup (b, \infty)$$

som er en åpen mengde.

Eksempel 3.11. Siden $\mathbb{R}$ er en åpen mengde har vi at $\emptyset = \mathbb{R}^c$ er lukket. Vi har dermed at $\emptyset$ både er åpen og lukket. Siden $\emptyset$ er åpen har vi også at $\mathbb{R} = \emptyset^c$ er lukket.

Oppgave 3.12. La $A \subset \mathbb{R}$ være en mengde som er åpen og lukket. Vis at $A = \emptyset$ eller $A = \mathbb{R}$.

Løsning: Anta at A ikke er $\emptyset$ eller $\mathbb{R}$, og at A er åpen. Da fins $a \in A$ og $b \notin A$. Anta for eksempel at $b > a$. Sett

$$B = \{x : a < x \leq b \ \& \ x \notin A\} \ \& \ c = \inf B$$

Da er $c \notin A$ siden A er åpen. Det kan ikke finnes $\epsilon > 0$ slik at $(c - \epsilon, c + \epsilon) \subset A^c$ da det ville motsi at c er et infimum. Så A^c er ikke åpen, og dermed er ikke A lukket.

Definisjon 3.13. (3.2.4) La $A \subseteq \mathbb{R}$ være en mengde. En $x \in \mathbb{R}$ sies åvære et *grensepunkt* for A dersom enhver $V_\epsilon(x)$ inneholder et punkt $y \in A$ med $y \neq x$.

Teorem 3.14. *(3.2.5) Et punkt $x \in \mathbb{R}$ er et grensepunkt for A hviss det fins en følge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sånn at $\lim_{n\to\infty} a_n = x$, og $a_n \neq x$ for alle x.*

Proof. Vi viser en implikasjon og overlater den andre til leseren. Såanta at x er et grensepunkt for A. For hver $n \in \mathbb{N}$ fins $a_n \in A, a_n \neq x$ med $|a_n - x| < 1/n$ (husk definisjonen av $V_\epsilon(x)$ med $\epsilon = 1/n$). Det er det det betyr at $a_n \to x$ når $n \to \infty$. □

Oppgave 3.15. Vis at ethvert punkt i Cantor-mengden C er et grensepunkt.

Definisjon 3.16. (3.2.6) Et punkt $a \in A$ er *isolert* dersom det ikke er et grensepunkt.

Eksempel 3.17. La $A = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$. Da er 1 et isolert punkt, mens 0 er et grensepunkt som ikke er med i A. Dersom $B = A \cup \{0\}$ så er 0 et grensepunkt for B og $0 \in B$.

Definisjon 3.18. (3.2.7) En mengde $A \subset \mathbb{R}$ er *lukket* dersom den inneholder alle sine grensepunkter.

Oppgave 3.19. Vis at et lukket intervall $[a, b]$ er lukket.

Bemerkning 3.20. La $A \subseteq \mathbb{R}$ være en lukket mengde, og la $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ være en Cauchyfølge. Da vet vi at $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ er konvergent og vi må ha at grensen a er i A. Dette kan muligens forklare begrepet "lukket": du kan ikke komme deg "ut av mengden" via en uendelig prosess.

Oppgave 3.21. Vis at en mengde $A \subset \mathbb{R}$ er åpen hviss A^c er lukket.

Løsning: Anta først at A er åpen. La $x \in \mathbb{R}$ og la $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A^c$ være en følge med $x_n \to x$. Dersom $x \in A$ fins $V_\epsilon(x) \subset A$ så $x_n \in A$ for store nok n. Det strider i mot antagelsen såvi må ha $x \in A^c$.

Anta såat A ikke er åpen. Da fins $x \in A$ og $x_n \in A^c$ med $x_n \in V_{1/n}(x)$. Da er x et grensepunkt for A^c, så A^c er ikke lukket.

Teorem 3.22. *(3.2.14.) Vi har at*

(*i*) *En endelig union av lukkete mengder er lukket.*
(*ii*) *Et vilkårlig snitt av lukkede mengder er lukket.*

Bevis: Vi bruker forrige oppgave (eller vår tidligere alternative, men ekvivalente, definisjon av lukkete mengder). For åvise (*i*) antar vi at $A_1, ..., A_n$ er lukkete mengder. Da er A_j^c åpen for hver j. Vi har at

$$(\bigcup_{j=1}^{n} A_n)^c = \bigcap_{j=1}^{n} A_n^c$$

som er åpen ved Teorem 3.8 (*ii*).

For åvise (*ii*) lar vi $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ være en samling lukkete mengder. Vi har at

$$(\bigcap_{\alpha} A_\alpha)^c = \bigcup_{\alpha} A_\alpha^c$$

som er åpen ved Teorem 3.8 (*i*). □

3.3. **Kompakte mengder.**

Definisjon 3.23. (3.3.1) En mengde $K \subset \mathbb{R}$ er *kompakt* dersom enhver følge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ har en delfølge som konvergerer til et punkt i K.

Teorem 3.24. *(3.3.4) En mengde $K \subset \mathbb{R}$ er kompakt hviss den er lukket og begrenset.*

Bevis: Anta først at K er lukket og begrenset. La $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K$ være en følge. For hver $m \in \mathbb{N}$ og N_m fins ved Prosjektoppgave 2 en $n_m \geq N_m$ med

$$|a_{n_m} - \limsup\{a_n\}| \leq 1/m \tag{3.1}$$

Ved induksjon kan vi da konstruere $n_m < n_{m+1}, m = 1, 2, 3, ...$ sånn at (3.1) holder. Da konvergerer $\{a_{n_m}\}$ mot $s = \limsup\{a_n\}$ og siden K er lukket har vi $s \in K$; ellers ville s være et grensepunkt som ikke er med i K.

Vi må nå sjekke hva som skjer dersom K enten ikke er lukket eller begrenset. Vi antar at K ikke er lukket, og overlater siste mulighet til leseren. Da fins $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ med $a_n \to a \notin K$. En delfølge av $\{a\}_{n\in\mathbb{N}}$ må ogsåkonvergere mot a, så det fins ingen delfølge som konvergerer mot et punkt i K. □

3.4. G_δ- og F_σ-mengder.

Definisjon 3.25. (3.5.1) En mengde $A \subseteq \mathbb{R}$ kalles en *F_σ-mengde* dersom den kan skrives som en tellbar union av lukkete mengder. En mengde $G \subseteq \mathbb{R}$ kalles en *G_δ-mengde* dersom den kan skrives som et tellbart snitt av åpne mengder.

En F_σ-mengde er altså en mengde

$$A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n, A_n \text{ lukket}$$

og en G_δ-mengde er en mengde

$$G = \bigcap_{n=0}^{\infty} G_n, G_n \text{ åpen}$$

Det er viktig åmerke seg at vi indekserer over naturlige tall, $n \in \mathbb{N}$ - altså tellbarhet.

Siden vi ikke krever at alle $A_n$er eller $G_n$er er forskjellige tillater vi ogsåendelige snitt og unioner, men husk at en endelig union av lukkete mengder er lukket, og at et endelig snitt av åpne mengder er åpent.

Mange mengder er både G_δ- og F_σ-mengder - for eksempel er åpne og lukkete intervaller begge deler. Såfor slike mengder er ikke distinksjonen relevant. Det mest interessante er å se påF_σ-mengder uten indre punkter[3] versus tette G_δ-mengder[4] I så fall tenker vi på F_σ-mengder som småog G_δ-mengder som store. For eksempel er $\mathbb{Q}$ en F_σ-mengde, men ikke en G_δ-mengde, mens mengden I av irrasjonale tall er en G_δ-mengde, men ikke en F_σ-mengde. Vi ser mer på relaterte ting i oppgavene under.

3.5. Prosjekt 3.

Oppgave 1

(a) La $a, b \in \mathbb{Q}, a \neq b$. Vis at det fins åpne mengder U_1 og U_2 i $\mathbb{R}$ slik at

$$a \in U_1, b \in U_2, \mathbb{Q} \subset U_1 \cup U_2 \ \& \ U_1 \cap U_2 = \emptyset$$

(b) Vis det samme som i (a) der $\mathbb{Q}$ er byttet ut med I - mengden av irrasjonale tall.

(c) Vis det samme som i (a) og (b) der $\mathbb{Q}$ og I er byttet ut med Cantor-mengden C.

Mengdene $\mathbb{Q}, I$ og C sies å være *totalt usammnenhengende*. Se Oppgave 6 for et relatert resultat.

Oppgave 2 (3.5.3.)

(a) Vis at $[a, b]$ er en G_δ-mengde.

(b) Vis at $(a, b]$ er både er en G_δ-mengde og en F_σ-mengde.

(c) Vis at $\mathbb{Q}$ er en F_σ-mengde og at mengden I av irrasjonale tall er en G_δ-mengde.

[3]Et punkt $a \in A$ er et indre punkt dersom det fins $\epsilon > 0$ slik at $(a - \epsilon, a + \epsilon) \subset A$

[4]En mengde $G \subset R$ er tett dersom vi for alle intervaller (a, b) har at $G \cap (a, b) \neq \emptyset$.

Oppgave 3 (3.5.1.)
Argumenter for at en mengde A er en G_δ-mengde hvis og bare hvis komplementet er en F_σ-mengde.

I de neste oppgavene møter vi begrepet *tett*. En mengde $A \subset \mathbb{R}$ sies å være tett dersom vi for alle intervaller (a, b) har at $A \cap (a, b) \neq \emptyset$.

Oppgave 4
La G_1 og G_2 være mengder i $\mathbb{R}$ som er åpne og tette. Vis at $G_1 \cap G_2$ er tett (vi vet allerede at $G_1 \cap G_2$ er åpen - Teorem 3.6 (3.2.3)). Finn moteksempel dersom vi ikke antar at G_1 og G_2 er åpne.

Oppgave 5 (3.5.4.)

Bevis følgende teorem.

Teorem 3.26. *(3.5.2+) La $G_1, G_2, G_3, .., G_n, .., n \in \mathbb{N}$ være mengder i $\mathbb{R}$ som er åpne og tette. Da er*

$$G = \bigcap_{n=0}^{\infty} G_n$$

tett.

Oppgave 6 (3.5.5.)
Vis at det er umulig å skrive

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n$$

der F_n er en lukket mengde som ikke inneholder noen ikke-tomme åpne intervaller.

Oppgave 7 (Sammenlign med Oppgave 1)
La U_1 og U_2 være ikke-tomme åpne mengder i $\mathbb{R}$, og anta at $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Vis at $\mathbb{R} \neq U_1 \cup U_2$.

Hint: La $a \in U_1$ og $b \in U_2$. Anta at $a < b$. Se på

$$c = \sup[(a, b) \cap U_1]$$

Av denne grunn sier vi at $\mathbb{R}$ er *sammenhengende*.

Oppgave 8 (Bonus)
Formuler hva det skal bety at en mengde $A \subset \mathbb{R}$ er *sammenhengende*. Finn alle sammenhengende delmengder av $\mathbb{R}$.

4. Grenser til funksjoner og kontinuitet, uke 10&11, kapittel 4 i Abbott

Anbefalte forberedelser: Les 4.1 "Discussion: Examples of Dirichlet and Thomae."

Diverse:

(*i*) Dirichlet's and Thomae's functions.
(*ii*) Monotone funksjoner.

Definisjoner:

(4.2.1.) Grenser til funksjoner.
(4.3.1.) Kontinuitet.
(4.4.4.) Uniform kontinuitet.
(4.6.2.) Ensidige grenser til funksjoner.

Setninger:

(4.4.2.) En kontinuerlig fuksjoner på en kompakt $K \subset \mathbb{R}$ tar sitt maks/min.
(4.4.7.) Uniform kontinuitet.
(4.5.1.) Skjæringssetningen.

Oppgaver til innlevering: Se slutten av FORELESNINGSNOTATER - KAPITTEL 4.

FORELESNINGSNOTATER - KAPITTEL 4

Forelesningsnotatene er ikke ment å erstatte boken eller det å gåpå forelesning. De er skrevet for å få en grei oversikt over stoffet, og dels som mine egne forelesningsnotater.

4.1. **Cantor-funksjonen.** Før vi går inn påen formell definisjon antar vi at vi har en intuitiv forståelse av hva en *kontinuerlig funksjon* er (forsøk åformulere det). I følgende eksempel skal vi se påen kontinuerlig funksjon med en rimelig "vill" oppførsel. Husk konstruksjonen av Cantor-mengden

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n, C_n = \cup_{j=1}^{n} I_{nj}$$

fra Kapittel 3. Det eksisterer en kontinuerlig funksjon $\tilde{f} : [0,1] \to [0,1]$ som er voksende på $[0,1]$, konstant på alle åpne mengder i $[0,1] \setminus C$, og $F(C) = [0,1]$. Husk at C er totalt usammenhengende.

Funksjonen $\tilde{f}$ kan konstrueres som følger. I steg n av konstruksjonen av Cantor-mengden er C_n en mengde bestående av 2^n disjunkte lukkete intervaller I_{nk}. Disse er separert av $2^n - 1$ åpne intervaller J_{nl} og til sammen har vi en partisjon av $[0,1]$ i $2^{n+1} - 1$ intervaller A_{nj} - annenhver åpne og lukkete - organisert fra venstre til høyre. Definer

$$f_n(x) = \frac{j}{2^{n+1}} \text{ for } x \in A_{nj}$$

Da konvergerer f_n uniformt[5] mot $\tilde{f}$ når $n \to \infty$, og vi har at

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq 2^{-n} \ \& \ |\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)| \leq 2^{-n} \text{ for } |x - y| \leq 2^{-n}$$

[5]Dette er et begrep vi kommer tilbake til senere.

Konstruksjonen og et forsk på å visualisere grafene til f_n når $n \to \infty$ - og dermed grafen til $\tilde{f}$ - gir opphav til tilnavnet *The Devil's Staircase* for funksjonen $\tilde{f}$.

4.2. **Grenseverdier og kontinuitet.** Husk definisjonen av et *grensepunkt* for en mengde $A \subset \mathbb{R}$ (Definisjon 3.13). Vi sier at $c \in \mathbb{R}$ er et grensepunkt for A dersom det for alle $\epsilon > 0$ fins

$$a \in A, a \neq c \ \& \ a \in V_\epsilon(c)$$

Oppgave 4.1. Definer hva det vil si at et punkt $c \in \mathbb{R}$ er henholdsvis venstre og høyre grensepunkter for en mengde A.

Definisjon 4.2. (4.2.1.)(4.6.2.) La $A \subset \mathbb{R}$ og la $f : A \to \mathbb{R}$ være en funksjon. La $c \in \mathbb{R}$ være et grensepunkt (henholdsvis venstre eller høyre grensepunkt) for A. Vi sier at

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

dersom for alle $\epsilon > 0$ fins $\delta > 0$ sånn at $x \in A, 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$. Vi sier at

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = L$$

dersom for alle $\epsilon > 0$ fins $\delta > 0$ sånn at $x \in A, c - \delta < x < c \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$. Vi sier at

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = L$$

dersom for alle $\epsilon > 0$ fins $\delta > 0$ sånn at $x \in A, c < x < c + \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$.

Definisjon 4.3. (4.3.1.) En funksjon $f : A \to \mathbb{R}$ er *kontinuerlig i* $c \in A$ dersom det for alle $\epsilon > 0$ fins $\delta > 0$ slik at $|x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \epsilon$.

Oppgave 4.4. Formuler hva det vil si at en funksjon *ikke* er kontinuerlig i et punkt $c \in A$.

Eksempel 4.5. Vi definerer følgende funksjon.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{hvis } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{hvis } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Denne kalles *Dirichletfunksjonen* og er ikke kontinuerlig i noe punkt.

Definisjon 4.6. (4.4.4.) En funksjon $f : A \to \mathbb{R}$ er *uniformt kontinuerlig* dersom det for alle $\epsilon > 0$ fins $\delta > 0$ slik at $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$.

Definisjon 4.7. (4.6.1.) En funksjon $f : A \to \mathbb{R}$ er *voksende* dersom $f(x) \leq f(y)$ for $x < y$ og *avtagende* dersom $f(y) \leq f(x)$ for $x < y$. Dersom f er enten voksende eller avtagende sier vi at den er *monoton*.

En funksjon $f : A \to \mathbb{R}$ kan ha tre ulike typer diskontinuiteter i et punkt $c \in A$:

(*i*) Dersom $b = \lim_{x \to c} f(x)$ eksisterer men $f(c) \neq b$ sier vi at diskontinuiteten er *hevbar*.
(*ii*) Dersom $\lim_{x \to c^-} f(x) \neq \lim_{x \to c^+} f(x)$ sier vi at f har en *sprang-diskontinuitet* i c.
(*iii*) Dersom $\lim_{x \to c}$ ikke eksisterer av en annen grunn sier vi at diskontinuiteten er *essensiell*.

4.3. **Prosjekt 4.**

Oppgave 1: Vis at følgende funksjoner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er kontinuerlige i et punkt $c \in \mathbb{R}$.

(i) $f(x) = a \in \mathbb{R}$ (det vil si, f er konstant)
(ii) $f(x) = x$
(iii) $f(x) = x^2$

(Se etterpå Teorem 4.3.4. i boka)

Oppgave 2: Vi definerer følgende funksjon konstruert av Thomae.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } x = 0 \\ 1/q & \text{hvis } x = p/q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \text{ med } p, q \text{ uten felles faktorer} \\ 0 & \text{hvis } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

(a) Vis at f er diskontinuerlig i hver $x \in \mathbb{Q}$.

(b) Vis at f er kontinuerlig i enhver $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Hint: (b) La $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ og la $p_n/q_n \to x$ når $n \to \infty$ der p_n & q_n ikke har felles faktorer. Da har vi $q_n \to \infty$ når $n \to \infty$.

Oppgave 3 (4.6.4.): Se på $f : A \to \mathbb{R}$ og et grensepunkt c for A. Vis at

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \text{ hvis og bare hvis } \lim_{x \to c^-} f(x) = L \ \& \ \lim_{x \to c^+} f(x) = L$$

Vi ser nå på en *voksende* funksjon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Oppgave 4 (4.6.5.):

(a) La $c \in \mathbb{R}$. Vis at grensene

$$\lim_{x \to c^-} f(x) =: L_{c^-} \text{ og } \lim_{x \to c^+} f(x) =: L_{c^+}$$

eksisterer.

(b) Vis at hvis f ikke er kontinuerlig i c så har vi $L_{c^-} < L_{c^+}$; spesielt er c en sprang-diskontinuitet.

Oppgave 5 (4.6.6.):

Vis at mengden D_f av diskontinuerlige punkter for en voksende funksjon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er tellbar.

Hint: For hver diskontinuitet c har vi assosiert et åpent intervall $I_c = (L_{c^-}, L_{c^+})$, og for $c \neq c'$ har vi $I_c \cap I_{c'} = \emptyset$.

Bemerkning 4.8. Generelt er det slik at om $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er en vilkårlig funksjon såer D_f en F_σ-mengde (Teorem 4.6.6.). Vi har sett (Kapittel 3) at mengden I av irrasjonale tall ikke er en F_σ-mengde. Dermed kan ikke I være diskontinuitetsmengden til noen funksjon.

Oppgave 6 (Skjæringssetningen, Teorem 4.5.1)

I denne oppgaven skal vi diskutere og bevise skjæringssetningen: *La* $[a, b] \subset \mathbb{R}$, *la* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *være kontinuerlig, og anta at* $f(a) = -1$ *og* $f(b) = 1$. *Da fins et punkt* $c \in (a, b)$ *med* $f(c) = 0$.

(a) Bevis at dette ikke alltid er sant dersom $[a, b] \subset \mathbb{Q}$ og $f : [a, b] \to \mathbb{Q}$ - vi ser altså kun påde rasjonale tallene.

(b) Vi går tilbake til formuleringen av skjæringssetningen over. Argumenter for at

$$c = \sup\{x : f(x) < 0\}$$

eksisterer.

(c) Vis at $f(c) = 0$ der c er fra (b).

5. Den deriverte, uke 12&13, kapittel 5 i Abbott

Anbefalte forberedelser: Les 5.1 "Discussion: Are Derivatives Continuous?".

Definisjoner:

(5.2.1.) Deriverbarhet.

Setninger:

(5.2.3.) Deriverbare funksjoner er kontinuerlige.
(5.2.6.) Indre ekstremum.
(5.2.7.) Darboux' teorem.
(5.3.1.) Rolles teorem.
(5.3.2.) Middelverdisetningen.
(5.3.3.) Derivert identisk lik null impliserer konstant.

Oppgaver til innlevering: Se slutten av FORELESNINGSNOTATER - KAPITTEL 5.

FORELESNINGSNOTATER - KAPITTEL 5

Forelesningsnotatene er ikke ment å erstatte boken eller det å gåpå forelesning. De er skrevet for å få en grei oversikt over stoffet, og dels som mine egne forelesningsnotater.

Ekstremalverdisetningen: Dette kapittelet handler om derivasjon, men vi kommer til å trenge et resultat vi ikke rakk ådekke i forrige kapittel.

Teorem 5.1. *(4.4.2.-)(Ekstremalverdisetningen-) La $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ være kontinuerlig. Da fins $c, d \in [a, b]$ sånn at*

$$f(c) \leq f(x) \leq f(d)$$

for alle $x \in [a, b]$.

Bevis: Vi viser eksistensen av d; eksistensen av c er tilsvarende.

Det følger først fra kontinuitet at $f([a, b])$ er begrenset ovenfra. Anta for åå en motsigelse at det eksisterer en følge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [a, b]$ sånn at $f(x_n) \to \infty$ når $n \to \infty$. La $s = \limsup\{x_n\}$ (se Kapittel 2). Da er $s \in [a, b]$ siden $[a, b]$ er lukket. Da fins $N \in \mathbb{N}$ slik at $f(x_n) \geq f(s) + 1$ når $n \geq N$. Samtidig fins $\delta > 0$ slik at $|f(x) - f(s)| < 1$ når $|x - s| < \delta$. Og ved Prosjekt 2, Oppgave 5, fins $x_m, m \geq N$ sånn at $|x_m - s| < \delta$. Da har vi $f(x_m) < f(s) + 1$ og $f(x_m) \geq f(s) + 1$.

Siden vi nå har vist at $A := f([a, b])$ er begrenset ovenfra fins $s = \sup A$. Da fins $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sånn at $f(x_n) \to s$ når $n \to \infty$. Sett $d = \limsup\{x_n\} \in [a, b]$. Da må $f(d) = s$.

□

Bemerkning 5.2. Merk at vi har brukt komplettheten av de reelle tall to ganger. Først for å vise at $f([a, b])$ er begrenset; deretter for a vise eksistensen av d.

Eksempel 5.3. La $[0, 2]_{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{Q}$, og la $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ være definert ved $f(x) = 1/(x - \sqrt{2})$. Da er f kontinuerlig, en ikke begrenset, og hverken c eller d fra teoremet fins. Anvendelsen av kompletthetsprinsippet i beviset er dermed ikke irrelevant.

Definisjon 5.4. (5.2.1.) La $f : A \to \mathbb{R}$, og la $c \in A$ være et grensepunkt for A. Vi sier at f *er deriverbar i* c dersom

$$g'(c) = \lim_{x \to c} \frac{g(x) - g(c)}{x - c}$$

eksisterer. Vi sier at f er deriverbar påA dersom den er deriverbar i alle $c \in A$.

Dette betyr: det eksisterer et tall $\alpha \in \mathbb{R}$ slik at for enhver $\epsilon > 0$ så fins $\delta > 0$ sånn at

$$|\frac{g(x) - g(c)}{x - c} - \alpha| < \epsilon \text{ når} |x - c| < \delta, x \neq c \tag{5.1}$$

og vi definerer den *deriverte* til f i c til å være α; vi bruker notasjonen $f'(c) = \alpha$.

Oppgave 5.5. Vis at en slik α er unik dersom den eksisterer.

Teorem 5.6. *(5.2.3.) Dersom $f : A \to \mathbb{R}$ er deriverbar i $c \in A$ såer f kontinuerlig i A.*

Bevis: Dersom f er deriverbar i c har vi at

$$|(\frac{g(x) - g(c)}{x - c} - \alpha)(x - c)| = |(g(x) - g(c)) - \alpha(x - c)| < \epsilon \cdot |x - c|$$

når $|x - c| < \delta, c \neq x$, og det følger at

$$|g(x) - g(c)| < (\epsilon + |\alpha|) \cdot |x - c| \text{ når } |x - c| < \delta \tag{5.2}$$

□

Bemerkning 5.7. Legg merke til at (5.2) er mye sterkere enn at f er kontinuerlig i c.

Eksempel 5.8. Se påfunksjonen $f(x) = |x|$. Denne funksjonen vet vi er kontinuerlig, og alternativt er den definert som $f(x) = x$ for $x \geq 0$ og $f(x) = -x$ for $x \leq 0$. Vi har

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1 \neq \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

så f er ikke deriverbar i origo.

Teorem 5.9. *(5.2.6) La f være deriverbar på et intervall (a, b). Dersom f har en lokal maksimums/minimums-verdi i $c \in A$ så har vi $f'(c) = 0$.*

Proof. Anta at f har er et lokalt maksimum i c - beviset i tilfellet lokalt minimum er analogt. Det betyr at det fins $\delta > 0$ slik at

$$f(x) \leq f(c) \text{ for } |x - c| < \delta$$

Anta først at $c < x < c + \delta$. Da har vi at

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \Rightarrow f'_+(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$$

For $c - \delta < x < c$ har vi at

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \Rightarrow f'_-(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$$

Vi har at $f'(c) = f'_+(c) = f'_-(c)$. □

5.1. **Kombinasjoner av deriverbare funksjoner og kjerneregelen.** For a regne med deriverte funksjoner og bevise visse egenskaper er det noen ganger lurt og reformulere hva det betyr å være deriverbar. At en funksjon $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ er deriverbar i $c \in (a, b)$ betyr i følge definisjonen vår at f *nesten* er lineær i c. Dette er et upresis utsagn, men det vi mener er følgende. Anta at f er deriverbar i c, og la $\beta(x)$ være funksjonen

$$\beta(x) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - f'(c)$$

definert for $x \in (a, b), x \neq c$. Da har vi at $\lim_{x\to c} \beta(x) = 0$ så β utvides til en funksjon på(a, b) som er kontinuerlig i c med $\beta(0) = 0$. En omskriving gir at

$$f(x) = f(c) + \alpha \cdot (x - c) + \beta(x) \cdot (x - c) \text{ der } \beta(x) \to 0 \text{ når } x \to c \tag{5.3}$$

der $\alpha = f'(c)$. Dette leder oss til en definisjon av deriverbarhet som er ekvivalent med den opprinnelige: f er deriverbar i $c \in (a, b)$ dersom det fins $\alpha \in \mathbb{R}$ og en funksjon $\beta(x)$ på $(a.b)$ sånn at (5.3) holder. Antar vi at (5.3) holder ser vi at

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \alpha + \beta(x) \to \alpha \text{ når } x \to c$$

Teorem 5.10. *(5.2.5)(Kjerneregelen) La*

$$f : (a_1, b_1) \to (a_2, b_2) \text{ og } g : (a_2, b_2) \to \mathbb{R}$$

være funksjoner, og anta at f er deriverbar i c og g er deriverbar i $f(c)$. Da er komposisjonen $h(x) = g(f(x))$ deriverbar i c og $h'(c) = f'(c) \cdot g'(f(c))$.

Oppgave 5.11. Bevis kjerneregelen i tilfellet der f og g er lineære, det vil si

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x - c) \text{ og } g(x) = g(f(c)) + g'(f(c))(x - f(c))$$

.

Bevis: Vi antar at $c = f(c) = g(f(c)) = 0$. Utregningene blir da enklere, men prinsippet er det samme som i det generelle tilfellet; dette lar vi være en oppgave. Da har vi

$$f(x) = f'(0) \cdot x + \beta_f(x) \cdot x \text{ og } g(x) = g'(0) \cdot x + \beta_g(x) \cdot x$$

Vi får

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g'(0) \cdot f(x) + \beta_g(x) \cdot f(x) \\ &= g'(0)(f'(0) \cdot x + \beta_f(x) \cdot x) + \beta_g(x) \cdot (f'(0) \cdot x + \beta_f(x) \cdot x) \\ &= g'(0) \cdot f'(0) \cdot x + (g'(0)\beta_f(x) + f'(0)\beta_g(x) + \beta_g(x)\beta_f(x))x \\ &= f'(0) \cdot g'(f(0)) + \beta(x) \cdot x \end{aligned}$$

□

Teorem 5.12. *(5.2.4) La $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ og anta at begge er deriverbare i $c \in (a, b)$. Da er følgende kombinasjoner deriverbare i c og vi har*

(i) $(f + g)'(c) = f'(c) + g'(c)$
(ii) $(kf)'(c) = kf'(c), k \in \mathbb{R}$

(iii) $(fg)'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c)$
(iv) $(f/g)'(c) = \frac{f'(c)g(c)-f(c)g'(c)}{g(c)^2}$ *gitt at* $g(c) \neq 0$

Bevis: For å bevise (i)–(iii) skriver vi

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \beta_f(x)(x-c) \text{ og } g(x) = g(c) + g'(c)(x-c) + \beta_g(x)(x-c)$$

□

(i) Vi har

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= f(c) + f'(c)(x-c) + \beta_f(x)(x-c) + g(c) + g'(c)(x-c) + \beta_g(x)(x-c) \\ &= f(c) + g(c) + (f'(c) + g'(c))(x-c) + (\beta_f(x) + \beta_g(x))(x-c) \\ &= f(c) + g(c) + (f'(c) + g'(c))(x-c) + \beta(x)(x-c) \end{aligned}$$

(ii) Oppgave
(iii) Vi har

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= (f(c) + f'(c)(x-c) + \beta_f(x)(x-c)) \cdot (g(c) + g'(c)(x-c) + \beta_g(x)(x-c)) \\ &= f(c)g(c) + (f(c)g'(c) + f'(c)g(c))(x-c) \\ &+ f(c)\beta_g(c)(x-c) + f'(c)g'(c)(x-c)^2 + g(c)\beta_f(c)(x-c) + \beta_f(x)\beta_g(x)(x-c)^2 \\ &= f(c)g(c) + (f(c)g'(c) + f'(c)g(c))(x-c) + \beta(x)(x-c) \end{aligned}$$

For å vise (iv) kan vi kombinere noen resultater snarere enn å regne det ut direkte. Vi viser først at funksjonen $h(x) = 1/x$ er deriverbar i enhver $c \neq 0$. Deretter overlater vi til leseren å bruke kjerneregelen på funksjonen $h(g(x))$ og deretter produktregelen på $f(x)h(g(x))$.

Vi har

$$\lim_{x\to c} \frac{1/x - 1/c}{x-c} = \lim_{x\to c} \frac{(c-x)/xc}{x-c} = \lim_{x\to c} \frac{-1}{xc} = \frac{-1}{c^2}$$

5.2. **Prosjekt 5.**

Oppgave 1:

I denne oppgaven skal vi gi et alternativt bevis for Teorem 5.10. Anta at f er deriverbar på (a, b). Anta at det fins $c \in (a, b)$ med $f'(c) > 0$. Vis at det fins $\delta > 0$ og $\alpha > 0$ sånn at

$$f(x) - f(c) \geq \alpha(x - c) \text{ når } c < x < c + \delta$$

Punktet c er altsåikke et lokat maksimum for f.

Formuler et tilsvarende resultat for $f'(c) < 0$.

Oppgave 2:

I denne oppgaven skal vi formulere og gi et bevis for Rolles teorem.

Teorem 5.13. *(5.3.1.)(Rolles teorem) La* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *være kontinuerlig, og deriverbar på* (a, b). *Dersom* $f(a) = f(b)$ *fins* $c \in (a, b)$ *med* $f'(c) = 0$.

Vi skriver $\alpha = f(a) = f(b)$, og deler vi beviset opp i to alternativer.

(a) Anta at $f(x) = \alpha$ for alle $x \in [a, b]$. Vis resultatet i dette tilfellet (fra definisjonen av deriverbarhet).

(b) Anta at $f(x)$ ikke er lik α for alle $x \in [a, b]$. Vis at det må finnes et lokalt maksimum eller et lokalt minimum for f på (a, b).

(c) Fullfør beviset i tilfellet (b).

Oppgave 3:

I denne oppgaven skal vi generalisere Rolles teorem og formulere og bevise middelverdisetningen.

Teorem 5.14. *(5.3.2.)(Middelverdisetningen) La $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ være kontinuerlig, og deriverbar på (a, b). Da fins $c \in (a, b)$ med*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

(a) Vis at dette er en direkte konsekvens av Rolles teorem dersom $f(a) = f(b)$.

(b) Vi vil nå redusere beviset til Rolles teorem. Se på funksjonen

$$g(x) := f(x) + (x - a)\frac{f(a) - f(b)}{b - a}$$

Vis at g tilfredsstiller antagelsene i Rolles teorem. Vis hvordan det fullfører beviset.

Oppgave 4:

La $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være deriverbar, og anta at $f'(x) = a$ for alle $x \in \mathbb{R}$. Da fins $b \in \mathbb{R}$ slik at $f(x) = ax + b$ for alle $x \in \mathbb{R}$.

(a) Sett $b = f(0)$. Anta at $x > 0$ og bruk middelverdisetningen på intervallet $[0, x]$.

(b) Bevis resultatet for $x < 0$.

Oppgave 5:

Husk konstruksjonen av Cantorfunksjonen $f : [0, 1] \to [0, 1]$ fra forrige kapittel. Den er en voksende kontinuerlig funksjon med $f(0) = 0, f(1) = 1$. For hver n eksisterer det 2^n disjunkte lukkete intervaller $I_{nj} \subset [0, 1]$, hver av lengde 3^{-n}, og på hvert av de åpne intervallene som separerer I_{nj} og $I_{n(j+1)}$ er f konstant. Lengden til intervallene I_{nj} sammenlagt er altså $(2/3)^n$, og den sammenlagte lengden av intervallene der vi vet at f er konstant er $1 - (2/3)^n$.

Lar vi $n \to \infty$ ser vi altså at f øker fra 0 til 1 selv om den er konstant på en mengde av total lengde 1; den har altså en derivert lik null på en mengde av lengde 1. Man kan vise at f ikke er deriverbar i noen av punktene i Cantor mengden C; her skal vi vise noen svakere resultater.

(a) Vis at dersom f er deriverbar på $(0, 1)$ så er f' ikke kontinuerlig.

(b) Vis at dersom f er deriverbar på $(0, 1)$ så er f' ikke begrenset.

References

1. Abbott, Stephen; Understanding Analysis. Undergrad. Texts Math. Springer, New York, 2015, xii+312 pp. ISBN: 978-1-4939-2711-1; 978-1-4939-2712-8

E. F. Wold: Department of Mathematics, University of Oslo, Postboks 1053 Blindern, NO-0316 Oslo, Norway

E-mail address: erlendfw@math.uio.no