MAT2100 - ELEMENTÆR REELL ANALYSE - VÅR 2026

E. F. WOLD

7. Rekker og rekker av funksjoner, uke 17&18, deler av kapittel 2 og 6 i Abbott

Anbefalte forberedelser: Les kapittel 2 og 6 om rekker og rekker av funksjoner.

Definisjoner:

(2.4.3.) Rekker og konvergens av rekker
(6.4.1.) Rekker av funksjoner

Setninger:

(2.7.6.) Absolutte rekker er konvergente
(6.3.1.) Resultat om deriverbar grense
(6.4.2.) Kontinuitetsteorem for rekker
(6.5.2.) Konvergens av potensrekker
(7.4) Konvergenskriterie
(7.6) Konvergenskriterie

Oppgaver til innlevering:
Finner du i slutten av forelesningsnotatene.

FORELESNINGSNOTATER - UKE 17/18

Forelesningsnotatene er ikke ment å erstatte boken eller det å gå på forelesning. De er skrevet for å få en grei oversikt over stoffet, og dels som mine egne forelesningsnotater.

7.1. **Rekker.** Vi skal nå se på rekker - det vil si uttrykk på formen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n, a_n \in \mathbb{R} \tag{7.1}$$

Vi har allerede sett eksempler, for eksempel *geometriske rekker*

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \tag{7.2}$$

Date: May 12, 2026.

Vi har nok sett tidligere at for $|r| < 1$ så har vi

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} \tag{7.3}$$

Men hva betyr egentlig dette? Hva er en uendelig sum? La oss først se på tilfellet $0 < r < 1$ (vi lager en tegning for å få en intuisjon - kom på forelesning).

For å gjøre dette rigid reduserer vi til å snakke om følger. Vi definerer først

$$s_m = \sum_{n=0}^{m} r^n$$

Dette kalles den *m'te delsummen* til rekka. Da er $\{s_m\}_{N\in\mathbb{N}}$ en følge, og vi sier at rekka konvergerer mot et tall s dersom følgen s_m konvergerer mot s, og i så fall sier vi at den uendelige summen er lik s, altså (7.3) med $s = \frac{1}{1-r}$ (dersom dette er sant - hvilket det er).

For å bevise dette påstår vi først at

$$s_m = \frac{1-r^{m+1}}{1-r}$$

(dette kan bevises ved induksjon, men vi hopper over det nå). Så regner vi ut $s - s_m$

$$s - s_m = \frac{1}{1-r} - \frac{1-r^{m+1}}{1-r} = \frac{r^{m+1}}{1-r}$$

Velg en k sånn at $|r|^k < (1-r)$. Da har vi

$$|s - s_m| \leq \frac{|r|^k \cdot |r|^{m-k}}{1-r} < |r|^{m-k}$$

Velg N slik at $|r|^{N-k} < \epsilon$. For $m \geq N$ har vi da at

$$|s - s_m| < |r|^{m-k} \leq |r|^{N-k} < \epsilon$$

Definisjon 7.1. (2.4.3.) Vi ser nå på en generell rekke (7.1). Vi definerer den *m'te delsummen* til rekka til å være

$$s_m = \sum_{n=0}^{m} a_m$$

Vi sier at rekka er *konvergent* dersom følgen $\{s_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ er konvergent.

Definisjon 7.2. Vi sier at en rekke (7.1) er *absolutt konvergent* dersom

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$$

er konvergent.

For å avgjøre om en rekke er konvergent kan vi nå bruke teorien om følger. For eksempel er $\{s_m\}$ konvergent hvis og bare hvis den er en Cauchy-følge; altså er en rekke konvergent hvis og bare hvis $\{s_m\}$ er en Cauchy-følge. Det vil si, for hver $\epsilon > 0$ fins $N \in \mathbb{N}$ slik at for alle $k > l \geq N$ så har vi

$$|s_k - s_l| < \epsilon \Leftrightarrow |a_{l+1} + a_{l+2} + \cdots + c_k| < \epsilon \tag{7.4}$$

(Se Teorem 2.7.2. i boka.)

En veldig nyttig observasjon er at siden vi ved trekantulikheten har at

$$|a_{l+1} + a_{l+2} + \cdots + c_k| \leq |a_{l+1}| + |a_{l+2}| + \cdots + |c_k|$$

så følger det at

Teorem 7.3. *(2.7.6.) En absolutt konvergent rekke er konvergent.*

Dermed er det velig nyttig å finne kriterier for at rekker (7.1) der vi har $a_n \geq 0$ for alle n er positive, konvergerer. Slike rekker kalles *positive rekker*.

Teorem 7.4. *La $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ være en positiv rekke. Anta at det fins $M > 0$ slik at $s_m \leq M$ for alle m. Da er rekka konvergent.*

Oppgave 7.5. Vis at s_m konvergerer mot $\sup\{s_m\}$.

Teorem 7.6. *La $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ og anta at $0 \leq |a_n| \leq M_n$ der $\sum_{n=0}^{m} M_n \leq M$ for alle m. Da er rekka konvergent.*

Oppgave 7.7. La $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ være en rekke og anta at det fins $0 < r < 1$ og $K > 0$ sånn at $|a_n| \leq Kr^n$ for alle n. Da er rekka konvergent.

7.2. **Betinget konvergens og alternerende rekker.** En konvergent rekke som ikke er absolutt konvergent kalles *betinget konvergent*. Se for eksempel på rekka

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

Denne er *ikke* absolutt konvergent, da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ (dette har vi sett i Kaptittel 2). Men se nå på $s_k - s_l, k > l$

$$\begin{aligned} |s_k - s_l| &= |\frac{(-1)^{l+1}}{l+1} + \cdots + \frac{(-1)^k}{k}| \\ &= (\frac{1}{l+1} - \frac{1}{l+2} + \frac{1}{l+3} - \frac{1}{l+4} + \cdots) \leq \frac{1}{l+1} \end{aligned}$$

Så hvis $\frac{1}{N+1} < \epsilon$ og $l, k \geq N$ så har vi $|s_k - s_l < \epsilon$. Så $\{s_m\}$ er en Cauchy-følge og dermed konvergent.

Definisjon 7.8. La $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ være en rekke. Vi sier at rekka er *alternerende* dersom $a_n = (-1)^n b_n, b_n \geq 0$, for alle n, eller $a_n = (-1)^{n+1} b_n, b_n, \geq 0$ for alle n.

Et argument som likner det over gir at

Teorem 7.9. *(2.7.7.) La $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ være en alternerende rekke med $|a_{n+1}| < |a_n|$ for alle n. Da har vi for $k > l$ at*

$$|s_k - s_l| \leq |a_{l+1}|$$

Spesielt har vi at dersom $a_n \to 0$ når $n \to \infty$ så er rekka konvergent.

Fikser nå en $x \in (-1, 1)$. Vi ser på rekka

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n}$$

Siden $|\frac{(-x)^n}{n}| < |x|^{-n}$ har vi at rekka konvergerer for alle $x \in (-1, 1)$. Dermed kan vi oppfatte dette som en rekke av funksjoner $h_n(x) = \frac{(-x)^n}{n}$, og denne rekken konvergerer mot en funksjon $f(x)$.

Videre, ved Teorem 7.9, er rekka konvergent også hvis vi setter $x = 1$. Dermed konvergerer rekka av funksjoner mot en funksjon

$$f : (-1, 1] \to \mathbb{R}$$

Hva vet vi om denne funksjonen? Er den kontinuerlig på $(-1, 1)$? Er den kontinuerlig på $(-1, 1])$? Er den deriverbar på $(-1, 1)$?

Disse tingene skal vi se nærmere på, men la oss nå anta at

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n}$$

er deriverbar på $(-1, 1)$. Anta videre at

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (-1) \cdot \frac{(-x)^{n-1}}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \frac{1}{1 - (-x)} = \frac{1}{1 + x}$$

I så fall har vi at $f(x) = \log(1 + x)$ for $x \in (-1, 1)$.

Spørsmål: Er det da videre sant at $f(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \log(2)$?

7.3. **Rekker av funksjoner.** La $h_n : A \to \mathbb{R}$ være en funksjon for alle $n \in \mathbb{N}$. En *rekke* av funksjoner er et uttrykk på formen

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} h_n$$

Vi mener med dette at for hver $x \in A$ så har vi $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n(x)$ - dersom dette gir mening. For hver fikserte x er altså $f(x)$ en rekke i kjent forstand fra Kapittel 2

Den k'te *delsummen* til rekka er definer ved

$$f_k = \sum_{n=0}^{k} h_n$$

slik at $\{f_k\}$ er en følge av funksjoner definert på A. Vi sier at rekka konvergerer *punktvis* dersom $f_k(x)$ konvergerer for alle x og at rekka konvergerer *uniformt* hvis f_k konvergerer uniformt.

Eksempel 7.10. La $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være definert ved $h_n(x) = x^n$. Da har vi at

$$f_k(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^k$$

Oppgave 7.11. Vis at $f_k(x)$ ikke konvergerer for noen x med $|x| \geq 1$.

For $|x| < 1$ vet vi fra tidligere at

$$f_k(x) = \frac{1 - x^{k+1}}{1 - x} \ \& \ f_k(x) \underset{k\to\infty}{\to} \frac{1}{1 - x} =: f(x)$$

For å avgjøre om konvergensen er punktvis eller uniform ser vi på $f - f_k$

$$f(x) - f_k(x) = \frac{1}{1 - x} - \frac{1 - x^{k+1}}{1 - x} = \frac{x^{k+1}}{1 - x} \to \infty \text{ når } x \to 1^-$$

Så konvergensen er *ikke* uniform; den er tregere og tregere når x nærmer seg 1. Men konvergensen *er* uniform på enhver $A = [-a, a]$ der $0 \leq a < 1$.

Oppgave 7.12. Bevis dette.

Bemerkning 7.13. Det følger automatisk fra Teorem **??** at hvis $\sum_{n\in\mathbb{N}} h_n$ er en rekke av *kontinuerlige* funksjoner $h_n : A \to \mathbb{R}$, og hvis rekka konvergerer uniformt mot en funksjon $f : A \to \mathbb{R}$, så er f kontinuerlig.

Vi sier at en rekke $\sum_{n\in\mathbb{N}} h_n$ av funksjoner $h_n : A \to \mathbb{R}$ er *absolutt konvergent* dersom $\sum_{n\in\mathbb{N}} |h_n|$ er konvergent.

Oppgave 7.14. Bevis at dersom $f = \sum_{n\in\mathbb{N}} h_n$ er absolutt konvergent, så er f konvergent. Dersom $\sum_{n\in\mathbb{N}} |h_n|$ konvergerer uniformt så konvergerer $\sum_{n\in\mathbb{N}} h_n$ uniformt mot f.

Teorem 7.15. *La $h_n : A \to \mathbb{R}$ være funksjoner for $n \in \mathbb{N}$ og anta at $|h_n(x)| \leq M_n$ for alle $x \in A$, der $\sum_{n\in\mathbb{N}} M_n < \infty$. Da konvergerer rekka $\sum_{n\in\mathbb{N}} h_n$ uniformt og absolutt.*

7.4. **Potensrekker.** Inspirert av eksempelet over definerer vi nå *potensrekker* som rekker

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n \cdot x^n, c_n \in \mathbb{R}$$

Disse kan sees på som generaliseringer av polynomer, for hvilke alle a_n'ene bortsett fra endelig mange er null. I motsetning til for polynomer konvergerer ikke slike rekker nødvendigvis for alle x (det har vi allerede sett over).

Mange funksjoner vi kjenner fra før er gitt ved potensrekker; slike funksjoner er mye mer "regulære" enn generelle deriverbare, eller til og med uendelig ganger deriverbare, funksjoner. For eksempel har vi

$e^x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^n}{n!}$ for alle $x \in \mathbb{R}$
$\cos(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ for alle $x \in \mathbb{R}$
$\sin(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ for alle $x \in \mathbb{R}$

Disse funksjonene er eksempler på hva man kaller *reell analytiske funksjoner*.

Teorem 7.16. *La $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n x^n$ være en potensrekke. Anta at det fins $b > 0$ slik at $\{c_n b^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ er begrenset. Da konvergerer potensrekka absolutt og uniformt på ethvert intervall $[-a, a]$ med $0 \leq a < b$; spesielt er f kontinuerlig på $[-a, a]$ og rekka konvergerer uniformt mot f.*

Bemerkning 7.17. For en potensrekke $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n x^n$ som konvergerer på et intervall $(-a, a)$ har vi at f er deriverbar, og

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} \text{ på } (-a, a)$$

Videre er f er integrerbar på $(-a, a)$, og hvis $g' = f$ har vi at

$$g(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1} + \widehat{c}_0, \widehat{c}_0 \in \mathbb{R}$$

I denne forstand kan vi altså manipulere potensrekker som vi manipulerer polynomer.

7.5. **Prosjekt 8.**

Oppgave 1

I denne oppgaven skal vi vise Teorem 7.3.

Teorem 7.18. *(2.7.6.) En absolutt konvergent rekke er konvergent.*

Oppgave 2

I denne oppgaven skal vi bevise Teorem 7.4

Teorem 7.19. *La $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ være en positiv rekke. Anta at det fins $M > 0$ slik at $s_m \leq M$ for alle m. Da er rekka konvergent.*

Oppgave 3

I denne oppgaven skal vi bevise Teorem 7.15

Teorem 7.20. *La $h_n : A \to \mathbb{R}$ være funksjoner for $n \in \mathbb{N}$ og anta at $|h_n(x)| \leq M_n$ for alle $x \in A$, der $\sum_{n\in\mathbb{N}} M_n < \infty$. Da konvergerer rekka $\sum_{n\in\mathbb{N}} h_n$ uniformt og absolutt.*

Oppgave 4

I denne oppgaven skal vi bevise Teorem 7.16

Teorem 7.21. *La $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n x^n$ være en potensrekke. Anta at det fins $b > 0$ slik at $\{c_n b^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ er begrenset. Da konvergerer potensrekka absolutt og uniformt på ethvert intervall $[-a, a]$ med $0 \leq a < b$; spesielt er f kontinuerlig på $[-a, a]$ og rekka konvergerer uniformt mot f.*

Oppgave 5

I denne oppgaven skal vi se på rekken av funksjoner

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^{n+1}}{n}$$

Vi kommer til å få bruk for flere resultater fra dette kapittelet.

(a) Bevis at $f(x)$ eksisterer på $(-1, 1)$ og er kontinuerlig på $(-1, 1)$.

Påstand: Vi har at $f(x) = \log(1 + x)$ for $x \in (-1, 1)$ (vi aksepterer det uten bevis; se eventuelt i boka).

(b) Bevis at $f(1)$ eksisterer.

(c) Bevis at f konvergerer uniformt på $[0, 1]$.

(d) Bevis at $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \log 2$.

References

1. Abbott, Stephen; Understanding Analysis. Undergrad. Texts Math. Springer, New York, 2015, xii+312 pp. ISBN: 978-1-4939-2711-1; 978-1-4939-2712-8

E. F. Wold: Department of Mathematics, University of Oslo, Postboks 1053 Blindern, NO-0316 Oslo, Norway

Email address: erlendfw@math.uio.no