UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Underveiseksamen i:	MAT2200 – Grupper, ringer og kropper.
Eksamensdag:	Onsdag 17/3, 2004.
Tid for eksamen:	Kl. 09.00–12.00.
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.
Oppgavesettet er på 1 side.	

Oppgave 1. Definer

a) Den symmetriske gruppen på n bokstaver.

b) Kjernen til en gruppe homomorfi.

c) Senteret til en gruppe.

d) Normal undergruppe.

e) Lengden til en sykel.

Oppgave 2.

a) Vis at ekte undergrupper av en gruppe med 35 elementer er sykliske.

b) Finn alle abelske grupper opp til isomorfi av orden 2004.

c) Gitt et naturlig tall $n \geq 1$, vis at det fins kun endelig mange grupper av orden n opp til isomorfi. (Hint: Cayleys teorem.)

d) La G og H være endelige grupper. Anta $|G|$ og $|H|$ er relativt primske. Finn alle gruppe-homomorfier $G \to H$.

e) Anta $\phi : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ er en gruppe homomorfi. Vis at ϕ er triviell. (Hint: Hvis $q \in \mathbb{Q}$ og $\phi(q) \neq 0$, betrakt $\phi(\frac{q}{2\phi(q)})$.)

Oppgave 3.

a) Vis at

$$SO_2(\mathbb{R}) = \left\{ R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \Big| \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

er abelsk undergruppe av $GL_2(\mathbb{R})$.

b) Definer

$$\phi : \mathbb{R} \to SO_2(\mathbb{R})$$

ved $\phi(\theta) = R_\theta$. Finn kjernen til ϕ. Identifiser $SO_2(\mathbb{R})$ med en kvosientgruppe av de reelle tall.

c) Vis at $R_\theta \in SO_2(\mathbb{R})$ har endelig orden hvis og bare hvis det fins heltall m, n slik at $\theta = \frac{2\pi m}{n}$.

d) Forklar hvorfor det fins elementer $g, h \in GL_2(\mathbb{R})$, begge av orden 2, slik at gh ikke har endelig orden.

SLUTT