UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT 2200 — Grupper, ringer og kropper.
Eksamensdag:	Onsdag 9. juni 2004.
Tid for eksamen:	09.00 – 12.00
Oppgavesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

a) La p være et primtall som deler ordenen til en endelig gruppe G. Formuler Sylows tredje teorem om antall Sylow p-undergrupper av G.

I resten av oppgaven betrakter vi

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{matrix} a \in (\mathbb{Z}/5)^\times \\ b \in \mathbb{Z}/5 \end{matrix} \right\}$$

som en gruppe under matrisemultiplikasjon.

b) Vis at G har en normal undergruppe av orden 5.

c) Finn antall Sylow 2-underrgrupper av G.
(Hint: $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.)

(Fortsettes side 2.)

Oppgave 2.

La K være rotkroppen til $x^5 - 1$ over $\mathbb{Q}$ og la L være rotkroppen til $x^5 - 5$ over $\mathbb{Q}$.

a) Vis at $K \subseteq L$ og finn $[L : \mathbb{Q}], [K : \mathbb{Q}], [L : K]$.

b) Beskriv Galois gruppen $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$.

c) Forklar hvorfor det fins en surjektiv gruppehomomorfi

$$\phi_K^L : \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \to \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}).$$

Finn kjernen til ϕ_K^L.

d) Vis at ϕ_K^L avbilder Sylow 2-undergruppene av $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ isomorft på $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$.

e) Finn alle underkropper K' av L slik at $[K' : \mathbb{Q}] = 4$.
Finn antall underkropper L' av L slik at $[L' : \mathbb{Q}] = 5$.

Oppgave 3.

La p være et primtall.

a) Forklar hvorfor polynomet

$$f(x) = x^5 - 2px + p$$

er irredusibelt over $\mathbb{Q}$.

b) La K være rotkroppen til $f(x)$ over $\mathbb{Q}$. Vis at $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ er isomorf med S_5.
(Hint: Bruk (uten bevis) at $f(x)$ har 3 reelle nullpunkter.)

c) Er ligningen

$$f(x) = 0$$

løsbar over $\mathbb{Q}$ ved hjelp av radikaler? Begrunn svaret.

SLUTT