UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT 2200 — Grupper, ringer og kropper.
Eksamensdag:	Tirsdag 7. juni 2005.
Tid for eksamen:	09.00 – 12.00
Oppgavesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

Hvis H og G er grupper sier vi at en gruppe E er en *ekstensjon* av G med H hvis det fins en surjektiv homomorfi $E \to H$ med kjerne isomorf med G.

Vis at for to grupper G og H så er $G \times H$ en ekstensjon av G med H.

Vis at S_3 er en ekstensjon av en abelsk gruppe med en annen abelsk gruppe, men at S_3 ikke kan være isomorf med et produkt $G \times H$ med G, $H \leq S_3$ og G, H ikke trivielle. (Hint: Hvilke undergrupper har S_3?)

Oppgave 2.

La F være en kropp og la V være et endelig dimensjonalt vektorrom over F. Sett $F^* = F \setminus \{0\}$. Definer en relasjon $\sim$ på $V \setminus \{\vec{0}\}$ ved $v \sim w$ hvis det fins $\lambda \in F^*$ slik at $w = \lambda v$.

(Fortsettes side 2.)

a) Vis at $\sim$ er en ekvivalensrelasjon.

Hvis $V = F^{n+1}$ så kalles mengden av ekvivalensklasser for $\mathbb{P}^n_F$. Vis at hvis F er endelig så er $|\mathbb{P}^1_F| = |F| + 1$. (Hint: Vis først at alle klassene $\bar{v} = \{\lambda v \mid \lambda \in F^*\}$ inneholder nøyaktig $|F^*|$ elementer.)

b) La $GL_2(F)$ være gruppen av lineære isomorfier $T : F^2 \to F^2$, dvs. gruppen av 2×2 matriser med lineært uavhengige søyler.
Vis at elementene i $GL_2(F)$ induserer permutasjoner av $\mathbb{P}^1_F$. Vis at det fins en gruppehomomorfi $GL_2(\mathbb{Z}_p) \to S_{p+1}$ med kjerne $\left\{ \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{smallmatrix} \right) \middle| \lambda \in \mathbb{Z}_p^* \right\}$.
Vis at $GL_2(\mathbb{Z}_2) \simeq S_3$.
(Hint: Tell opp elementene i $GL_2(\mathbb{Z}_2)$.)

Oppgave 3.

Hvis $q(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbb{Q}[x]$ er et annengrads polynom setter vi *diskriminanten* til $q(x)$ lik $D = b^2 - 4ac$. Merk at $q(x)$ er irreduktibel over $\mathbb{Q}$ hvis og bare hvis $D = r^2$ for en $r \in \mathbb{Q}$.

En kropp E kalles en *kvadratisk* utvidelse av $\mathbb{Q}$ hvis $\mathbb{Q} \leq E$ og $[E : \mathbb{Q}] = 2$.

a) Vis at rotkroppen til et irreduktibelt annengrads polynom over $\mathbb{Q}$ er $\mathbb{Q}(\alpha)$ med $\alpha \in \mathbb{C}$ og $\alpha^2 = D$. Vis at E er en kvadratisk utvidelse av $\mathbb{Q}$ hvis og bare hvis $E = \mathbb{Q}(\alpha)$ for en $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \notin \mathbb{Q}$ og $\alpha^2 \in \mathbb{Q}$.

b) La $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ med α^2 og β^2 i $\mathbb{Q}$, mens $\alpha, \beta \notin \mathbb{Q}$. La $K = \mathbb{Q}(\alpha, \beta)$ og anta at $\mathbb{Q}(\alpha) \neq \mathbb{Q}(\beta)$.
Beskriv Galois gruppen $G(K/\mathbb{Q})$.

Bruk Galois teori til å finne alle kropper E med $\mathbb{Q} \leq E \leq K$ og uttrykk disse ved hjelp av α og β.

SLUTT