UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT 2200 — Grupper, ringer og kropper.
Eksamensdag:	Torsdag 8. juni 2006.
Tid for eksamen:	09.00 – 12.00.
Oppgavesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

a) Forklar hvorfor automorfigruppen til den additive gruppen $\mathbb{Z}_n$ er isomorf med den multiplikative gruppen $\mathbb{Z}_n^*$ av enheter i ringen $\mathbb{Z}_n$.

b) Vis at hvis $p \neq 2$ er et primtall, så har $\mathbb{Z}_p^*$ bare ett element av orden 2. Konkluder at avbildningen $a \mapsto -a$ er den eneste automorfien av orden 2 av den additive gruppen $\mathbb{Z}_p$.

c) La p være et primtall, $p \neq 2$, og K en gruppe av orden $2p$. Hva kan du si om antall Sylow 2-undergrupper og p-undergrupper av K ved bruk av Sylows teoremer?

Oppgave 2.

Betrakt polynomet $f(x) = x^6 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$. La $L \subset \mathbb{C}$ være rotkroppen til f.

a) Forklar hvorfor f er irredusibelt.

b) Bevis at $[L\colon \mathbb{Q}] = 12$.

(Fortsettes side 2.)

Oppgave 3.

Anta en gruppe G virker ved automorfier på en gruppe H, nemlig, vi har en homomorfi $G \to \mathrm{Aut}(H)$, $g \mapsto \alpha_g$.

a) Forklar hvorfor $\alpha_g(h^{-1}) = (\alpha_g(h))^{-1}$ og $\alpha_{g^{-1}}(h) = (\alpha_g)^{-1}(h)$ for $g \in G$ og $h \in H$.

Definer en binær operasjon på mengden $H \times G$ ved

$$(h_1, g_1)(h_2, g_2) = (h_1 \alpha_{g_1}(h_2), g_1 g_2).$$

b) Vis at $H \times G$ med den ovennevnte operasjonen er en gruppe. Den kalles et semidirekt produkt av H og G. (Hint: $(h, g)^{-1} = (\alpha_{g^{-1}}(h^{-1}), g^{-1})$.) Vi betegner denne gruppen som $H \rtimes_\alpha G$.

c) Vis at avbildningene $H \ni h \mapsto (h, e) \in H \rtimes_\alpha G$ og $G \ni g \mapsto (e, g) \in H \rtimes_\alpha G$ er injektive gruppehomomorfier. Derfor kan vi betrakte H og G som undergrupper av $H \rtimes_\alpha G$. Vis at H er en normal undergruppe av $H \rtimes_\alpha G$, og $(H \rtimes_\alpha G)/H$ er isomorf med G.

d) Anta G og H er undergrupper av en gruppe K slik at

   (i) K er generert av G og H;

   (ii) $G \cap H = \{e\}$;

   (iii) H er en normal undergruppe av K.

   For $g \in G$ definer en automorfi α_g av H ved $\alpha_g(h) = ghg^{-1}$. Vis at avbildningen $H \rtimes_\alpha G \to K$, $(h, g) \mapsto hg$, er en gruppeisomorfi.

Oppgave 4.

Betrakt gruppen $G = \mathbb{Z}_2$. Merk at det å ha en virkning av $\mathbb{Z}_2$ på en gruppe H ved automorfier er det samme som å ha en automorfi β av H slik at $\beta^2 = \mathrm{id}$. Vi sier da at β er en involutiv automorfi av H. Hvis $H = \mathbb{Z}_n$, så er avbildningen $a \mapsto -a$ på $\mathbb{Z}_n$ en slik automorfi. Det tilsvarende semidirekte produktet av $\mathbb{Z}_n$ og $\mathbb{Z}_2$ kalles dihedral-gruppen av orden $2n$ og betegnes som D_n. Derfor, hvis vi bruker multiplikativ notasjon, er D_n en gruppe generert av to elementer x og y slik at $x^n = e$, $y^2 = e$ og $yxy^{-1} = x^{-1}$.

a) La K være som i Oppgave 1(c). Bruk 1(b), 1(c) og 3(d) å vise at K er enten syklisk eller isomorf med dihedral-gruppen D_p.

b) La L være som i Oppgave 2. Vis at Galois gruppen $G(K/\mathbb{Q})$ er isomorf med dihedral-gruppen D_6.

SLUTT