UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT2200 — Grupper, ringer og kropper.
Eksamensdag:	Torsdag 7. juni 2007.
Tid for eksamen:	09.00 – 12.00.
Oppgavesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1. La $M_2(\mathbb{Z}_3)$ være ringen av 2×2-matriser over kroppen $\mathbb{Z}_3$ og la G være delringen av $M_2(\mathbb{Z}_3)$ gitt ved

$$G = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}_3 \},$$

hvor G har operasjonene av addisjon og multiplikasjon av matriser i $M_2(\mathbb{Z}_3)$.

a) Vis at G er en kropp.

b) Vis at polynomet $x^2 + 1$ er irredusibelt over $\mathbb{Z}_3$ og forklar hvorfor $\mathbb{Z}_3[x]/\langle x^2 + 1 \rangle$ blir en kropp.

c) La α være et nullpunkt av $x^2 + 1$ i en kroppsutvidelse av $\mathbb{Z}_3$. Husk at av definisjonen er $\mathbb{Z}_3(\alpha)$ isomorf med $Z_3[x]/\langle x^2 + 1 \rangle$. Vis at avbildningen

$$\phi\Big(\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\Big) = a + \alpha b$$

er en isomorfi fra G på kroppen $\mathbb{Z}_3(\alpha)$.

Oppgave 2.
a) Vis at polynomet $f(x) = x^5 - 2$ er irredusibelt over $\mathbb{Q}$.

(Fortsettes side 2.)

b) La $K = \mathbb{Q}(\sqrt[5]{2}, \zeta)$ hvor $\sqrt[5]{2}$ er den reelle 5-te roten av 2 og ζ er en primitiv 5-rot av enheden ($= \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$). Vis at K er rotkroppen til $f(x)$ over $\mathbb{Q}$ og at $[K : \mathbb{Q}] = 20$.

c) Forklar hvorfor det finns kun en mellomkropp $\mathbb{Q} \leq K' \leq K$ som er normal over $\mathbb{Q}$ og har $[K' : \mathbb{Q}] = 4$.

d) Finn antall mellomkropper $\mathbb{Q} \leq E \leq K$ slik at $G(K/E)$ tilsvarer Sylow 2-undergrupper av $G(K/\mathbb{Q})$.

Oppgave 3. La $\alpha = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$.

a) Finn det irredusible polynomet $f(x)$ til α over $\mathbb{Q}$.

b) La K være rotkroppen til $f(x)$ over $\mathbb{Q}$. Forklar hvorfor $[K : \mathbb{Q}] = 4$. Vis at $[K : \mathbb{Q}(\sqrt{5})] = 2$.

c) Vis at Galois gruppen $G(K/\mathbb{Q})$ er isomorf med den sykliske gruppen $(\mathbb{Z}_4, +)$. (Hint: merk at et av de elementene β i K som er konjugert med α over $\mathbb{Q}$ oppfyller $\alpha\beta = \sqrt{5}$ og se på utvidelsene til $G(K/\mathbb{Q})$ av det ikke-trivielle elementet i $G(\mathbb{Q}(\sqrt{5})/\mathbb{Q})$).

SLUTT