UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	MAT2200 — Grupper, ringer og kropper
Eksamensdag:	6. juni 2008
Tid for eksamen:	09.00 – 12.00
Oppgavesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Ingen hjelpemidler

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1

a

Finn tre forskjellige abelske grupper av orden 8. Begrunn hvorfor alle abelske grupper av orden 8 er isomorf til en av disse.

b

Finn en ikke-abelsk gruppe av orden 8. Begrunn hvorfor den ikke er abelsk.

c

Hvor mange undergrupper av orden 8 har S_4, den symmetriske gruppen på 4 elementer. Hvor mange av disse er abelske? Begrunn svaret.

Oppgave 2

a

Vis at $x^5 + 4x^3 + 2$ er irredusibelt over $\mathbb{Q}$.

b

Vis at $x^2 + 1$, $x^2 + x - 1$ og $x^2 - x - 1$ er de eneste irredusible polynomene av grad 2 over $\mathbb{Z}_3$, og vis at $x^5 + 4x^3 + 2$ er irredusibelt over Z_3.

c

Forklar hvorfor $F = \mathbb{Z}_3[x]/(x^5 + 4x^3 + 2)$ danner en kropp som inneholder $\mathbb{Z}_3$. Hvor mange elementer er det i F?

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 3

La $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$.

a

Finn rotkroppen (splitting field) E til $f(x)$ over $\mathbb{Q}$. Hva er $[E : \mathbb{Q}]$ og $G(E/\mathbb{Q})$?

b

Finn et element $a \in E$ slik at $E = \mathbb{Q}(a)$ (enkel utvidelse). Finn minimalpolynomet $(Irr(a, \mathbb{Q}))$ til a over $\mathbb{Q}$.