UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	MAT2200 — Grupper, ringer, og kropper.
Eksamensdag:	Onsdag, 2. juni, 2010.
Tid for eksamen:	14.30 – 17.30.
Oppgavesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Bemerk: alle svar må begrunnes!

Oppgave 1

La $M_3(\mathbb{Z}_5)$ være ringen av 3×3-matriser over kroppen $\mathbb{Z}_5$ og la R være delmengden av $M_3(\mathbb{Z}_5)$ gitt ved

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z}_5 \right\}.$$

1a

Vis at R er en kommutativ delring av $M_3(\mathbb{Z}_5)$ med identitetselement for multiplikasjon, hvor operasjonene er addisjon og multiplikasjon av matriser i $M_3(\mathbb{Z}_5)$.

1b

Vis at avbildningen $\phi : R \to \mathbb{Z}_5$ gitt ved

$$\phi \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = a$$

er en ringhomomorfi.

(Fortsettes på side 2.)

1c

Vis at delmengden

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid b, c \in \mathbb{Z}_5 \right\}$$

er et ideal i R, og at kvotientringen R/I er en kropp. Finn antall elementer i R/I.

Oppgave 2

La G være en gruppe av orden $|G| = 595 = 5 \cdot 7 \cdot 17$.

2a

Formuler Sylows tredje teorem. Finn de mulige antall Sylow p-undergrupper av G for hvert av primtallene $5, 7, 17$.

2b

Vis at G har en normal Sylow 5-undergruppe og en normal Sylow p-undergruppe for minst et av primtallene $p \in \{7, 17\}$.

2c

La K være den normale Sylow 5-undergruppen av G. Vis at G/K er abelsk.

Oppgave 3

La $f(x) = x^3 - 3$ og $g(x) = x^4 - 2x^2 - 3$ være i $\mathbb{Q}[x]$.

3a

Vis at $f(x)$ er irredusibel og at $g(x)$ er redusibel over $\mathbb{Q}$.

3b

Finn rotkroppen E til $g(x)$. Beregn $[E : \mathbb{Q}]$ og finn, op til isomorfi, Galois gruppen $G(E/\mathbb{Q})$.

3c

Finn rotkroppen K til familien $\{f(x), g(x)\}$. Vis at $[K : \mathbb{Q}] = 12$.

SLUTT.