UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT2200 — Grupper, ringer og kropper
Eksamensdag:	Onsdag 1. juni 2011
Tid for eksamen:	14.30 – 18.30
Oppgavesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

NB: Alle svar må begrunnes!

Oppgave 1

La G være en gruppe. Hvis x og y er to elementer i G, lar vi $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$.

1a

Vis at om $N \subseteq G$ er en normal undergruppe og $x \in N$ er et element, så er $[x, y] \in N$ for hvert element $y \in G$.

1b

Vis at om N_1 og N_2 er to normale undergrupper i G med $N_1 \cap N_2 = \{e\}$, så vil hvert element i N_1 kommutere med hvert element i N_2.

Oppgave 2

2a

Hvilke abelske grupper av orden 99 finnes (opp til isomorfi)? Og hvilke av 999 finnes?

2b

La G være en endelig gruppe og p et primtall. Hva mener vi med en Sylow p-undergruppe i G?

2c

La G være en gruppe av orden 99. Vis at alle Sylow-undergrupper i G er normale. Vis at G er abelske.

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 3

3a

La $\rho = e^{2\pi i/3}$ være en tredje enhetsrot. Finn minimalpolynomet $\mathrm{Irr}(\rho, \mathbb{Q})$ til ρ over $\mathbb{Q}$. Hva er graden $[\mathbb{Q}(\rho) : \mathbb{Q}]$?

3b

Vis at $x^2 + x + 1$ er redusibelt over kroppen $\mathbb{Z}_{13}$ med 13 elementer. (It may be usefull that $6^2 \equiv -3 \mod 13$).

3c

Vis at $x^2 + x + 2$ er irredusibelt i $\mathbb{Z}_5[x]$. La $a = \bar{x}$ være klassen til x i $\mathbb{Z}[x]/(x^2 + x + 2)$. Elementene $1, a$ utgjør en basis for $\mathbb{Z}[x]/(x^2 + x + 2)$ som vektorrom over $\mathbb{Z}_5$. Uttrykk a^4 og $1/(a + 1)$ i denne basisen.

Oppgave 4

La A være en syklisk gruppe med generator a som er skrevet multiplikativt.

4a

Vis at enhver undergruppe i A er syklisk.

4b

Anta at A er av jevn orden $2m$. La $b \in A$. Vis at det finnes en $x \in A$ med $x^2 = b$ hvis og bare hvis $b^m = 1$.

SLUTT

UNIVERSITY OF OSLO

Faculty of Mathematics and Natural Sciences

Examination in: MAT2200 — Groups, Rings and Fields

Day of examination: Wedensday 1. June 2011

Examination hours: 14.30 – 18.30

This problem set consists of 2 pages.

Appendices: None

Permitted aids: None

Please make sure that your copy of the problem set is complete before you attempt to answer anything.

Note: You must give full reasons for all your answers!

Problem 1

Let G be a group. If x and y are two elements in G, we let $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$.

1a

Show that if $N \subseteq G$ is a normal subgroup and $x \in N$ is an element, then $[x, y] \in N$ for every element $y \in G$.

1b

Show that if N_1 and N_2 are two normal subgroups of G with $N_1 \cap N_2 = \{e\}$, then every element in N_1 commutes with every element in N_2.

Problem 2

2a

Which abelian groups of order 99 are there (up to isomorphism)? And which of order 999?

2b

If G is a finite group, and p a prime, what is meant by a Sylow p-subgroup of G? What can one say about the number of Sylow p-subgroups in G?

2c

Let G be a group of order 99. Show that all Sylow-subgroups of G are normal. Show that G is abelian.

(Continued on page 2.)

Problem 3

3a

Let $\rho = e^{2\pi i/3}$ be a third root of unity. Find the minimal polynomial $\mathrm{Irr}(\rho, \mathbb{Q})$ of ρ over $\mathbb{Q}$. What is the degree $[\mathbb{Q}(\rho) : \mathbb{Q}]$?

3b

Show that $x^2 + x + 1$ is reducible over the field $\mathbb{Z}_{13}$ with 13 elements. (It may be usefull that $6^2 \equiv -3 \mod 13$).

3c

Show that $x^2 + x + 2$ is irreducible in $\mathbb{Z}_5[x]$. Let $a = \bar{x}$ be the class of x in $\mathbb{Z}[x]/(x^2 + x + 2)$. The elements $1, a$ constitute a basis for $\mathbb{Z}[x]/(x^2 + x + 2)$ as a vector space over $\mathbb{Z}_5$. Express a^4 and $1/(a + 1)$ in that basis.

Problem 4

Let A be a cyclic group with generator a and written multiplicatively.

4a

Show that every subgroup of A is cyclic.

4b

Assume now that A is of even order $2m$. Let $b \in A$. Show that there is an $x \in A$ with $x^2 = b$ if and only if $b^m = 1$.

END