UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i MAT2200 — Grupper, ringer, og kropper.

Eksamensdag: Onsdag, 6. juni, 2012.

Tid for eksamen: 14.30 – 18.30.

Oppgavesettet er på 2 sider.

Vedlegg: Ingen.

Tillatte hjelpemidler: Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Bemerk: Begrunn alle svar!

Oppgave 1

Betrakt kroppen $\mathbb{Z}_p$ for p et primtall og la G være følgende delmengde av 2×2 matrisene $M_2(\mathbb{Z}_p)$:

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{Z}_p, a, c \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\} \right\}.$$

1a

Vis at G er en gruppe med operasjonen gitt ved multiplikasjon av matriser i $M_2(\mathbb{Z}_p)$. Finn ordenen til G.

1b

La $p = 3$. Vis at G har minst en normal undergruppe som ikke er hele gruppen eller den trivielle undergruppen. (For eksempel ved å finne en slik undergruppe, eller ved å resonnere med Sylow's teoremer.)

La G' være en gruppe med 12 elementer. La H være en Sylow 2-undergruppe av G', og K en Sylow 3-undergruppe av G'.

1c

Anta at både H og K er normale undergrupper av G'. Vis at $hk = kh$ for alle $h \in H$ og $k \in K$. Konkluder at avbildingen $\phi : H \times K \to G'$, $\phi(h, k) = hk$ for $(h, k) \in H \times K$ er en isomorfi av grupper, og at G' er abelsk.

(Fortsettes på side 2.)

1d

Anta at Sylow 3-undergruppen K er normal mens Sylow 2-undergruppen H ikke er normal i G'. Vis at det fins elementer $h \in H$ og $k \in K$ slik at $hkh^{-1} = k^2$.

Oppgave 2

La R og R' være ringer, og la $\phi : R \to R'$ være en ringhomomorfi.

2a

La N være et ideal i R og N' et ideal i R'. Anta at $\phi[N] \subseteq N'$. Vis at avbildingen $\psi : R/N \to R'/N'$ gitt ved $\psi(a+N) = \phi(a)+N'$ er en veldefinert ringhomomorfi. Dersom ϕ er surjektiv og $\ker \phi \subseteq N$, vis at ψ er en isomorfi av ringer fra R/N på $R'/\phi[N]$.

2b

Anta at R og R' er kommutative og har enhet (unity) 1 henholdsvis $1'$. Anta også at ϕ er surjektiv med $\phi(1) = 1'$. Vis at når M er et maksimalt ideal i R slik at $\ker \phi \subseteq M$, da vil $\phi[M]$ være et maksimalt ideal i R'.

2c

La p være et primtall. Finn et maksimalt ideal i ringen $\mathbb{Z}_{p^n}$ for hvert $n \geq 1$.

Oppgave 3

3a

La $\alpha = \sqrt{2} + i$ i $\mathbb{C}$. Vis at α er algebraisk over $\mathbb{Q}$ ved å finne det irredusible polynomet $f(x)$ for α over $\mathbb{Q}$. Husk å bevise at $f(x)$ er irredusibelt over $\mathbb{Q}$.

3b

Finn rotkroppen K til $f(x)$. Beregn $[K : \mathbb{Q}]$ og finn, opp til isomorfi, Galois gruppen $G(K/\mathbb{Q})$.

3c

Sett opp Galois korrespondansen mellom undergrupper av $G(K/\mathbb{Q})$ og mellomkropper $\mathbb{Q} \leq E \leq K$.

SLUTT.