UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: MAT2200 — Grupper, ringer og kropper

Eksamensdag: Fredag 13. juni 2014

Tid for eksamen: 14.30 – 18.30

Oppgavesettet er på 3 sider.

Vedlegg: Ingen

Tillatte hjelpemidler: Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Alle punkter teller likt.

NB: Alle svar må begrunnes!

Oppgave 1

La n være et naturlig tall og la S_n betegne den symmetriske gruppen på n bokstaver. Dersom $\rho \in S_n$ gjelder formelen

$$\rho(1, 2, \ldots, n)\rho^{-1} = (\rho(1), \rho(2), \ldots, \rho(n)).$$

Den kan brukes uten bevis.

1a

Vis at enhver n-sykel $(a_1, \ldots, a_n)$ er konjugert til $(1, 2, \ldots, n)$. Forklar hvorfor det er $(n-1)!$ forskjellige n-sykler i S_n.

1b

Anta at $\sigma \in S_n$ er en n-sykel. La $C(\sigma) = \{\, \rho \in S_n \mid \rho\sigma = \sigma\rho \,\}$. Vis at $C(\sigma) = \langle\, \sigma \,\rangle$. HINT: Se på konjugasjonsvirkningen av S_n på seg selv og bruk sammenhengen mellom ordenen til en isotropigruppe og antall elementer i en bane.

Oppgave 2

La σ betegne 5-syklen $\sigma = (1, 2, 3, 4, 5)$ og la τ betegne permutasjonen $\tau = (1, 5)(2, 4)$.

2a

Vis at $\tau^2 = \mathrm{id}$, at $\tau(3) = 3$ og at $\tau\sigma\tau = \sigma^{-1}$.

(Fortsettes på side 2.)

2b

La N være undermengden av S_5 gitt som

$$N = \{ \rho \in S_5 \mid \rho\sigma\rho^{-1} = \sigma^{\epsilon(\rho)} \text{ der } \epsilon(\rho) \in \{\pm 1\} \}$$

Vis at N er en undergruppe av S_5 og at gruppen $\langle \sigma \rangle$ generert av σ er en normal undergruppe av N.

2c

Vis at $\epsilon\colon N \to \{\pm 1\}$ er en surjektiv gruppehomomorfi. Bestem kjernen til ϵ og vis at N er av orden 10. HINT: Oppgave 1b) kan være til nytte.

Oppgave 3

3a

Anta at G er en gruppe med to normale, abelske undergrupper A og B. Anta at ordnene $|A|$ og $|B|$ er relativt primiske. Vis at $A \cap B = \{e\}$ og at $AB = \{ xy \mid x \in A, y \in B \}$ er en abelsk undergruppe av orden $|A||B|$.

3b

Vis at om undergruppene A og B i forrige punkt også er sykliske, så er AB syklisk.

3c

La G være en gruppe av orden 1001. Vis at G er syklisk. HINT: $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$.

Oppgave 4

La K være en kropp av karakteristikk forskjellig fra to. La L være en kroppsutvidelse av K. Anta at vi har et element $i \in L$ slik at $i^2 = -1$ og et element $a \in L$ slik at $a^2 = i$.

4a

Vis at $a^4 = -1$, at $((1+i)a)^2 = -2$ og at $((1-i)a)^2 = 2$.

4b

Vis at vi har følgende likhet i polynomringen $L[x]$:

$$x^4 + 1 = (x-a)(x+a)(x-ia)(x+ia)$$

4c

Vis at $x^4 + 1$ er irredusibelt over K hvis og bare hvis hverken -1, 2 eller -2 er et kvadrat i K.

(Fortsettes på side 3.)

4d

Vis at $x^4 + 1$ er redusibelt over hver av kroppene $\mathbb{Z}_5$ og $\mathbb{Z}_7$ og bestem i begge tilfeller faktoriseringen av $x^4 + 1$ i irredusible faktorer.

SLUTT