UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT2200 — Grupper, ringer og kropper
Eksamensdag:	Onsdag, 10. juni 2015
Tid for eksamen:	14.30 – 18.30
Oppgavesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Alle delspørsmål har samme vekting.
Merk at det er forventet at alle svar er begrunnet!

Oppgave 1 La a, b og c være elementer i en endelig gruppe G.

a) Vis at de to elementene abc og cab har samme orden.

b) Finn tre elementer a, b og c i den symmetriske gruppa S_3 slik at abc og bac har forskjellig orden.

Oppgave 2 La H være en normal undergruppe av en gruppe G, og la $[G : H] = m$. Vis at $g^m \in H$ for en $g \in G$.

Oppgave 3 La G være en gruppe av orden $|G| = 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$. Vis at G inneholder en normal Sylow undergruppe..

Oppgave 4 La R være en kommutativ ring med enhet 1. La $a \in R$, $a \neq 0$ og $b, b' \in R$ tilfredsstille $ba = b'a = 1$. Vis at $b = b'$.

Oppgave 5 la $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en ring-automorfi av de reelle tallene $\mathbb{R}$. Vis at $\sigma = Id_{\mathbb{R}}$ ved å følge denne oppskriften:

- Bruk at for $x > 0$, så finnes $y \in \mathbb{R}$ slik at $x = y^2$ til å vise at dersom $x > 0$, så er $\sigma(x) > 0$
- Vis at hvis $a < b$, så er $\sigma(a) < \sigma(b)$.
- Vis at for ethvert positivt heltall $r \in \mathbb{Z}$, så er $\sigma(r) = r$.
- Vis at for ethvert rasjonalt tall $\frac{m}{n}$, så er $\sigma(\frac{m}{n}) = \frac{m}{n}$.

Dersom σ er identiteten på $\mathbb{Q}$ og $\sigma(x) > x$ for alle $x > 0$, da kan vi konkludere med at $\sigma = Id_{\mathbb{R}}$. (Det er ikke meningen at du skal vise denne siste påstanden.)

(Fortsettes på side 2.)

OPPGAVE 6 La $f(x) = x^6 - 25$.

a) Faktoriser $f(x)$ i irredusible faktorer over $\mathbb{Q}$.

b) Vis at rotkroppen til $f(x)$ over $\mathbb{Q}$ er gitt ved $K = \mathbb{Q}(\alpha, \omega)$, hvor $\alpha = \sqrt[3]{5}$ og $\omega^3 = 1$ med $\omega \neq 1$. (Det kan være nyttig å merke seg at $(\omega + 1)^3 = -1$)

c) Vis at $[K : \mathbb{Q}] = 6$, og at $G(K/\mathbb{Q}) \simeq S_3$.

d) La $\sigma, \tau \in G(K/\mathbb{Q})$ være slik at

$$\sigma(\alpha) = \alpha\omega, \quad \sigma(\omega) = \omega,$$
$$\tau(\alpha) = \alpha, \quad \tau(\omega) = \omega^2$$

Vis at $\mathbb{Q}(\alpha^2\omega)$ er fiks-kroppen til $\langle \sigma\tau \rangle$.

SLUTT.