Løsningsforslag midtveiseksamen MAT 2200 vår 2005.

1a) En permutasjon $\sigma \in S_4$ virker på X ved

$$\phi(\sigma)(\{\{i,j\},\{k,l\}\}) = \{\{\sigma(i),\sigma(j)\},\{\sigma(k),\sigma(l)\}\}.$$

Mengden $\{\{\sigma(i),\sigma(j)\},\{\sigma(k),\sigma(l)\}\}$ består av disjunkte delmengder siden σ er injektiv. Dette gir en gruppehomomorfi $\phi : S_4 \to S_X$.

Anta $\sigma \in \ker(\phi)$. Hvis $\sigma(i) = i$ for en i må σ være identiteten. Derfor hvis $\sigma \neq \mathrm{id}$ må σ være en 4-sykel eller et produkt av to disjunkte 2-sykler. En 4-sykel (i,j,k,l) tar $\{\{i,j\},\{k,l\}\}$ til $\{\{k,j\},\{i,l\}\} \neq \{\{i,j\},\{k,l\}\}$, så den kan ikke være i kjernen. Man sjekker at produkter av disjunkte 2-sykler faktisk er i kjernen.

Derfor er

$$\ker(\phi) = \{\mathrm{id}, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\}.$$

Spesielt er den av orden 4. Bildet av ϕ er dermed av orden $24/4 = 6 = |S_X|$ så ϕ må være surjektiv. Siden alle elementene i $\ker(\phi)$, bortsett fra identiteten, er av orden 2 er $\ker(\phi) \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

1b) La $H = \ker(\phi)$ fra oppgave 1a. Alle elementene i H er produkter av to transposisjoner så $H \leq A_4$. Videre er H normal i S_4 siden den er kjernen til en homomorfi, men da er den også normal i undergruppen A_4.

2a) Vi må vise at $N(H)$ er lukket under gruppeoperasjonen, inneholder identiteten og inverse for alle sine elementer. Dette følger av at hvis $g, g_1, g_2 \in N(H)$, så er $g_1 g_2 H g_2^{-1} g_1^{-1} = g_1 H g_1^{-1} = H$ og $g^{-1} H g = g^{-1}(gHg^{-1})g = H$.

Hvis $k \in H$ så er $k^{-1} \in H$ og derfor $khk^{-1} \in H$ for alle $h \in H$, dvs at $kHk^{-1} \subseteq H$. Videre kan vi skrive for alle $h \in H$, $h = k(k^{-1}hk)k^{-1}$, så $H \subseteq kHk^{-1}$. Det betyr at $H \leq N(H)$ og per definisjon av $N(H)$ er den en normal undergruppe.

2b) La $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in GL_2$. Da er $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ og

$$\frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} \lambda ad - \mu bc & ab(\mu - \lambda) \\ cd(\lambda - \mu) & \mu ad - \lambda bc \end{bmatrix}.$$

For generell λ, μ er matrisen til høyre i T hvis og bare hvis $ab = 0$ og $cd = 0$. Siden $\det(A) \neq 0$ må vi ha $a = d = 0$ eller $b = c = 0$. Det følger at $N(T)$ består av de diagonale og anti-diagonale matrisene i GL_2.

En hver anti-diagonal matrise kan skrives som et produkt

$$\begin{bmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

så $N(T)/T$ består av to restklasser; T og $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} T$. Derfor må $N(T)/T \simeq \mathbb{Z}_2$.

3) Siden graden er 2 er $x^2 + ax + b$ irreduktibel hvis og bare hvis det ikke har en rot i $\mathbb{Z}_2$. Vi ser at 0 er en rot hvis og bare hvis $b = 0$ og 1 er en rot hvis og bare hvis $a + b = 1$. Derfor er $x^2 + x + 1$ det eneste irreduktible annen grads polynom i $\mathbb{Z}_2[x]$.