Løsningsforslag til midttermineksamen i MAT2200
17. mars 2004
kl. 09.00 - 12.00.

Oppgave 1. Med referanse til 7. utgave av læreboka:

a) Definisjon 8.6.
b) Definisjon 13.13.
c) Se side 150.
d) Definisjon 13.19, Teorem 14.13.
e) Definisjon 9.6.

Oppgave 2.

a) Lagranges teorem gir at ekte undergrupper av en gruppe av orden 35 har orden 1, 5 eller 7. Den trivielle gruppen samt alle grupper av primtallsorden er sykliske.

b) Vi har primtallsfaktoriseringen $2004 = 2^2 \times 3 \times 167$. I følge strukturteoremet for endelige abelske grupper fins det derfor 2 abelske grupper opp til isomorfi av orden 2004, nemlig:

$$\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/167$$
$$\mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/167$$

c) Hvis G har orden n er G isomorf med en undergruppe av S_n. Det fins kun endelig mange slike undergrupper.

d) Anta $\phi : G \to H$ er en gruppehomomorfi. Da er $\mathrm{im}(\phi)$ en undergruppe av H. Lagranges teorem impliserer $|\mathrm{im}(\phi)|$ deler $|H|$. Det fundamentale isomorfismeteoremet impliserer $|\mathrm{im}(\phi)|$ deler $|G|$. Fra antagelsen $\gcd(|G|, |H|) = 1$, får vi $|\mathrm{im}(\phi)| = 1$. Dvs. bildet til ϕ er identitetselementet i G. Det fins derfor kun en gruppehomomorfi fra G til H.

e) Vi følger hintet og bruker at ϕ er en gruppehomomorfi:

$$\begin{aligned}\phi(q) &= \phi(q\frac{2\phi(q)}{2\phi(q)}) \\ &= \phi(\underbrace{\frac{q}{2\phi(q)} + \cdots + \frac{q}{2\phi(q)}}_{2\phi(q)}) \\ &= 2\phi(q)\phi(\frac{q}{2\phi(q)})\end{aligned}$$

Utregningen ovenfor viser

$$\phi(\frac{q}{2\phi(q)}) = \frac{1}{2}.$$

Siden ϕ tar verdier i de hele tall betyr det at vi ikke kan finne et rasjonalt tall q slik at $\phi(q) \neq 0$. Det betyr at ϕ må være den trivielle gruppehomomorfien.

Oppgave 3.

a) Determinanten til R_θ er lik 1. Derfor er $R_\theta \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ for alle $\theta \in \mathbb{R}$. Merk at (2×2)-identitetsmatrisen I_2 er lik $R_0 \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. Inversen til R_θ i $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ er $R_{-\theta}$ som er et element i $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. Videre er

$$R_\theta R_{\theta'} = R_{\theta+\theta'} = R_{\theta'+\theta} = R_{\theta'} R_\theta \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}).$$

Det viser at $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ er en abelsk undergruppe av $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

b) Fra definisjonen av kjernen til en gruppehomomorfi,

$$\begin{aligned}\ker(\phi) &= \{\theta \in \mathbb{R} \mid R_\theta = I_2\} \\ &= \{\theta \in \mathbb{R} \mid \cos\theta = 1, \sin\theta = 0\} \\ &= \{\theta \in \mathbb{R} \mid \theta = (2\pi)m, m \in \mathbb{Z}\}.\end{aligned}$$

Merk at $\ker(\phi) = \langle 2\pi \rangle$ er en uendelig syklisk undergruppe av de reelle tall generert av $2\pi \in \mathbb{R}$. Siden ϕ er en surjektiv gruppehomomorfi følger det at $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ isomorf med $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

c) Elementet $R_{\frac{2\pi m}{n}}$ har endelig orden. Motsatt, hvis R_θ har endelig orden $n \in \mathbb{Z}$, er

$$R_\theta^n = R_{n\theta} = I_2.$$

Fra **b**) får vi $n\theta = (2\pi)m$, $m \in \mathbb{Z}$, som skulle vises.

d) I denne oppgaven bruker vi resultatet i **c**).

Hvis $\theta \in \mathbb{R}$, setter vi

$$S_\theta := \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Da er $\det(S_\theta) = -1$ slik at $S_\theta \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. Ved utregning ser vi enkelt at S_θ har orden 2. Hvis $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, har vi

$$S_\theta S_{\theta'} = R_{\theta+\theta'}.$$

Velger vi f.eks. $\theta = \theta' = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ vil $R_{\theta+\theta'}$ ha uendelig orden.