Obligatorisk oppgave MAT2200 vår 2007

Oppgave 1

Finn alle undergrupper av $\mathbb{Z}_{20}$.

Oppgave 2

Det er kjent at automorfiene til en gruppe G danner en gruppe Aut(G). Finn gruppen Aut($\mathbb{Z}_8$). Hvilken endelig, abelsk gruppe er Aut($\mathbb{Z}_8$) isomorf med?

Oppgave 3

La $GL(2,\mathbb{R})$ være gruppen av 2×2-matriser over $\mathbb{R}$ med determinant forskjellig fra 0 der operasjonen er matrisemultiplikasjon og identiteten er matrisen I_2. La C og D betegne matrisene

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{og } D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La $G = \{I_2, C, C^2, C^3, D, CD, C^2D, C^3D\}$.

(a) Lag multiplikasjonstabellen for G og vis at G er en gruppe.

(b) Finn alle undergruppene av G. (Vink: Bruk Lagrange's teorem til å finne mulige ordener av undergrupper).

(c) Finn, blandt de undergrupper fra (b), alle de som er normale.

Oppgave 4

(a) La G være en gruppe og H en undergruppe av G. Vis at der for hvert $a \in G$, mengden $aHa^{-1} = \{aha^{-1} \mid h \in H\}$ er en undergruppe av G, og H er isomorf med aHa^{-1}.

(b) La G være en endelig gruppe og H en undergruppe av orden n, for et $n \geq 1$. Hvis H er den eneste undergruppen av G av orden n, vis at H må være normal i G.

(c) Finn alle normale undergrupper av S_3, permutasjonsgruppen i 3 elementer.

Oppgave 5

La H være en normal undergruppe av G, og la $m = (G : H)$. Vis at $a^m \in H$ for hvert $a \in G$.

Obligatory assignment in the course MAT2200, spring 2007

Exercise 1

Find all subgroups of $\mathbb{Z}_{20}$.

Exercise 2

It is known that the automorphisms of a group G form a group Aut(G). Find the group $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_8)$. Which finite abelian group is $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_8)$ isomorphic to?

Exercise 3

Let $GL(2, \mathbb{R})$ be the group of real 2×2 invertible matrices with the operation given by matrix multiplication and the identity matrix I_2 as identity element. Let C and D denote the matrices

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{and } D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Let $G = \{I_2, C, C^2, C^3, D, CD, C^2D, C^3D\}$.

(a) Write the multiplication table for G and show that G is a group.
(b) Find all subgroups of G. (Hint: Use Lagrange's theorem to decide the possible orders of subgroups).
(c) Find, among all the subgroups from part (b), the ones that are normal.

Exercise 4

(a) Let G be a group and H a subgroup of G. Show that for each $a \in G$, the set $aHa^{-1} = \{aha^{-1} \mid h \in H\}$ is a subgroup of G, and H is isomorf with aHa^{-1}.

(b) Let G be a finite group and H a subgroup of G of order n for some $n \geq 1$. Assume that H is the only subgroup of G of order n. Then show that H must be normal in G.

(c) Find all normal subgroups of S_3, the permutation group on 3 elements.

Exercise 5

Let H be a normal subgroup of a group G, and let $m = (G : H)$. Show that $a^m \in H$ for every $a \in G$.