Obligatorisk oppgave i MAT2200 våren 2010

Besvarelsen til den obligatoriske oppgaven skal leveres på rom B714 i 7 etasje i Niels Henrik Abels Hus innen klokken 14:30 fredag den 19. mars.

Bemerk: Du skal gi bevis for alle dine svar. Alle delspørsmål har samme vekt. For å bestå må minst 50 % av oppgaven være besvart rigtigt.

Oppgave 1. (Spørsmålene (a)-(c) i denne oppgaven er uavhengige av hverandre.)

(a) Beregn antallet av generatorer av $\mathbb{Z}_5$. Hvilken kjent gruppe er $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_5)$ isomorf med?

(b) Finn, opp til isomorfi, alle endelige abelske grupper av orden 96.

(c) Finn to undergrupper av S_4 som er isomorfe med S_3 (det fins i alt fire slike undergrupper).

Oppgave 2. La G og G' være abelske grupper. La $\mathrm{Hom}(G, G')$ være mengden av alle homomorfier fra G til G'. Vi definerer en operasjon $+$ på $\mathrm{Hom}(G, G')$ ved følgende: for $f, g \in \mathrm{Hom}(G, G')$ la

$$f + g : G \to G', (f + g)(x) = f(x) + g(x) \text{ for alle } x \in G. \tag{1}$$

(a) Vis at $f + g \in \mathrm{Hom}(G, G')$. Du skal begrunne hvor i beviset det blir brukt at G' er abelsk.

(b) Vis at $(\mathrm{Hom}(G, G'), +)$ er en abelsk gruppe.

(c) Anta $G = \mathbb{Z}$. Vis at $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, G')$ er isomorf med G'. (Vink: bruk evaluasjonsavbildningen $\psi(f) = f(1)$ for $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, G')$.)

(d) Beskriv elementene i $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$.

Oppgave 3. La $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

(a) La $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{Z})$, og anta at $\det(A) = \pm 1$. Vis at avbildningen $\phi_A : G \to G$ gitt ved $\phi_A(x, y) = (ax + by, cx + dy)$ er en automorfi av G.

(b) Anta at $\phi : G \to G$ er en homomorfi. Vis at det fins $A \in M(2, \mathbb{Z})$ slik at $\phi = \phi_A$.

(c) Vis at når ϕ er en automorfi av G da er $\phi = \phi_A$ hvor $\det(A) = \pm 1$. (Vink: bruk Cramer's regel.)

Oppgave 4. La G være en gruppe og H en undergruppe av G.

(a) La X være samlingen av alle venstre sideklassene for H. La G virke på X ved venstre translation $g(xH) = gxH$ for $g \in G$ og $xH \in X$. La $\phi : G \to S_X$ være homomorfien gitt ved $\phi(g) = \sigma_g$ for $g \in G$, hvor $\sigma_g(xH) = gxH$ for $xH \in X$. Vis at $\ker \phi$ er inneholdt i H.

(b) Anta at G har orden pn hvor p er et primtall slik at $p > n$, og anta at H har orden p. Vis at H er normal i G.