En motivasjon— Kvadratets symmetrier

Dette lille notatet er ment som en motiverende introduksjon. Målet er å gi en forståelse av den aksiomatiske innføringen av grupper og hvorfor en gruppe defineres slik det gjøres. Det gir også et første eksempel på en gruppe, og er en første illustrasjon av hvordan man "regner" i en gruppe.

Kort historisk introduksjon

Gruppene gjorde sitt inntog i matematikken på slutten av syttenhundredetallet. Den fransk-italienske matematikeren LAGRANGE var den første som publiserte et arbeid med signifikante resultater om grupper. Selve arbeidet, med tittel *Réflexions sur la résolution algébrique des équations*, kom ut i 1771, og som tittelen indikerer, omhandler det ligningsteori, men grupper spiller en stor underliggende rolle der, selv om de ikke blir eksplisitt definert.

Joseph-LouisLAGRANGE, eller Giuseppe Lodovico LAGRANGIA som døpenavnet hans var, ble født i Torino. Nå ligger Torino i Nord-Italia, men på Lagranges tid lå det i Hertugdømmet Savoyen. Dette hertugdømmet omfattet den vestlige delen av Alpene et område som idag fordeler seg på både fransk og italiensk territorium — derav de forskjellige utgavene av navnet. Vi skal etterhvert møte flere av hans teoremer.

Tidlig på attenhundretallet fortsatte utviklingen av teorien for algebraiske ligninger med de to unge døde genier, den franske Évariste GALOIS og vår egen Niels Henrik ABEL, i førersetet. I den såkalte Galois-teorien spiller grupper en av hovedrollene, og Abels resultater om femtegradsligningen har til syvende og sist sin rot i gruppeteorien.

Fra en helt annen vinkel ble gruppeteori i tidsrommet fra ca 1830 til 1850 introdusert av flere fysikere i forbindelse med klassifikasjon av krystalinske strukturer, og August BRAVAIS er den mest kjente av disse. I 1850 publiserte han arbeidet *Mémoire sur les systèmes formés par les points distribués régulièrement sur un plan ou dans l'espace* der han etablerer at krystaller kun kan ha 32 forskjellige symmetrigrupper, og dette arbeidet danner grunnlaget for inndelingen av krystaller i de forskjellige klasser. For "krystaller i planet"—som vi heller omtaler som mønstre—er det tilsvarende resultatet at det for slike finnes 17 symmetrigrupper.

I løpet av århundede utviklet gruppeteorien seg nærmest eksplosivt med bidrag fra mange prominente matematiker — vi er sjåauvinistiske, og nevner bare våre to egne Sophus LIE og Ludwig SYLOW — og er etter hvert bli nærmest allestedsnærværende i matematikken. Det er nærmest en fellesnevner for alle oppkomstene av grupper at de ble oppdaget som *symmetrigrupper*, det være seg til en algebraisk ligning, en differentialligning , en krystall, eller en geometrisk figur.

Det ble etterhvert klart at, siden gruppene var viktige i så mange og dramatisk forskjellige grener av matematikken (og fysikken), man trengete en felles og enhetlig teori for grupper; det finnes ligninger og krystaller som har *identiske* symmetrigrupper.

Dermed oppstod den *abstrakte gruppeteorien*, der de egeneskapene til grupper som er uavhenig av hvilken anvendelse de har, kartlegges. Når så gruppene var forstått *per se*, kunne man koble dem på anvendelsene, og den delen av historien er det idag grovt sett det som nå kalles *representasjonsteori*, som tar seg av.

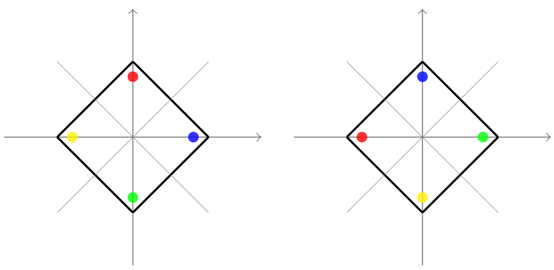
Før vi begynner å utvikle den generelle, abstakte teorien, skal vi gi et motiverende eksempel, og siden symmetri er et stikkord i denne sammenhengen, skal vi se på symmetriene til et kvadrat.

Symmetriene til et kvadrat

Vi tenker oss kvadratet liggende i planet og at det har hjørner i punktene $(1,0), (0,1), (0,-1)$ og $(-1,0)$, eller i punktene $1, -1, i$ og $-i$ om man foretrekker å tenke på planet som det komplekse tallplan. Kvadratet er tegnet på figur 1.

Vi har en intuitiv forståelse av hva symmetrien til en figur er, og én måte å presisere dette på, er å forestille seg figuren skåret ut av en treplate eller et annet stivt materiale. En symmetri kan da beskrives som en bevegelse av kvadratet. Det løftes ut, snus eller dreies, for så å legges tilbake i hullet det etterlot i treplaten.

Man kan selvsagt uttrykke dette på vesentlig mer presise og matematiske måter, noe vi skal komme nøyere tilbake til senere, men én måte er å tolke en symmetri som en *avstandsbevarende avbildning* ϕ — en såkalt *isometri* — fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}^2$ som fører kvadratet over i seg selv. Det vil si at dersom K betegner kvadratet, så skal avbildningen ϕ oppfylle at $\phi(x) \in K$ hver gang $x \in K$, som mer kompakt kan uttrykkes slik $\phi(K) = K$.



Figur 1: *Et kvadrat med hjørner* $1, -1, i$ *og* $-i$ *og dets symmetrilinjer. Til høyre kvadratet etter en rotasjon på* $90°$.

Rotasjonene

Et kvadrat har en rekke symmetrier. De første vi skal se på er rotasjonene. Kvadradet kan dreies om en akse med fotpunkt i origo som står vinkelrett på planet der kvadratet befinner seg, med en dreiningsvinkel på $90°$, med en på $180°$ eller også kan dreiningsvinkelen være $270°$. Dette gir oss tre rotasjoner.

Det er på sin plass å presisere at i denne sammenhengen er det *resultatene* av operasjonene som er viktig; altså hvordan kvadratet ligger etter at det er lagt tilbake. Det er irrelevant hva som skjer med det i mellomtiden. Om vi kaster det opp i luften et par ganger eller lar det ligge i en skuff en halv time, spiller ingen rolle. To symmetrier regnes i denne sammenhengen å være identiske dersom kvadratet i de to tilfellene ligger likt etter tilbakelegningen.

Med denne presiseringen vil — med noen unntak — alle andre rotasjoner være identiske med en av de tre ovenfor. For eksempel vil en rotasjon på $-90°$ — altså en på $90°$, men i negativ omdreiningsretning — gi samme resultat som en dreining på $270°$. Unntakene er som følger: Etter en dreining av kvadratet på $360°$, vil det bli liggende nøyaktig slik det lå før dreiningen; og det samme gjelder naturligvis enhver dreining på et helt multiplum av $360°$ (både i positiv og negativ omdreiningsretning). Vi skal også regne disse rotasjonene som symmetrier, og etter konvensjonen om når to operasjoner gir samme symmetri, er de alle identiske. De faller sammen med "freeze"-situasjonen, altså "rotasjonen" med en rotasjonsvinkel på $0°$. Vi kaller denne symmetrien for *identitetssymmetrien*, eller også den *trivielle symmetrien*.

Speilingene

Kvadratet har også *fire* symmetrilinjer som vi har tegnet med grått på figur 1. Det dreier seg om x-aksen, y-aksen og de to linjene $y = x$ og $y = -x$. Vi kan tippe kvadratet $180°$ om en av disse linjene, og det faller da tilbake i sin nisje. På denne måten oppstår fire nye symmetrier. De kan selvsagt realiseres som rotasjoner i *rommet*, med symmetrilinjen som akse og rotasjonsvinkel lik $180°$, men i planet oppleves de som *speilinger*[1] gjennom symmetrilinjen, derav navnet.

Disse fire sammen med identiteten og de tre rotasjonene utgjør alle kvadratets symmetrier, så det er altså til sammen *åtte* av dem. Vi betegner symmetrigruppen[2] til kvadratet med D_8.

Sammensetning av symmetrier

Vi må naturligvis på et eller annet vis merke kvadratets hjørnene for å kunne avgjøre om to tilbakelegninger er identiske eller ikke. På figuren har vi brukt fargede punkter.

Vi kan gjennomføre to symmetrioperasjoner i rekkefølge. Først én av symmetriene — som vi kan kalle α — vi løfter kvadratet, dreier eller tipper det, og legger det tilbake. Dernest neste — la oss kalle den β — vi løfter, manipulerer og legger tilbake. Resultatet av disse to operasjonene, er naturligvis en tredje symmetri — vi har løftet, manipulert og lagt tilbake! Den tredje symmetrien kaller vi for *sammensetningen* eller *produktet* av de to første, og vi skal her skrive[3] den som $\beta \circ \alpha$. Merk rekkefølgen. Den første symmetrien står til venstre. Dette er i samsvar med hva vi er vant til med funksjoner. Tenker vi på α og β som isometrier, er sammensetningen representert ved isometrien

[1] Tenker man for eksempel på linjen $y = x$ i figur 1 som et speil, er jo det grønne og det blå punktet speilbildene av det gule og det røde.

[2] Skrivemåten D_8 indikerer at gruppen er del av en større familie, og det er den. For hvert naturlige tall n betegner D_{2n} symmetrigruppen til en regulær mangekant med n kanter. Det er vanlig å bruke indeksen $2n$ fordi D_{2n} har $2n$ elementer, men mange forfattere skriver D_n for disse gruppene. De kalles *dihedrale* grupper.

[3] Det er mange forskjellige notasjoner ute og går for gruppelover, men det vanligste er å forenkle, droppe $\circ$ og bare skrive $\alpha\beta$, en skrivemåte vi etterhvert skal adoptere.

som sender punktet x til $\beta(\alpha(x))$.

Setter vi den trivielle symmetrien — som altså er den som intet gjør — sammen med en annen symmetri, α, får vi naturligvis α tilbake. Det rettferdigjør at vi betegner den trivielle med e. Da har vi nemlig likhetene $\alpha \circ e = e \circ \alpha = \alpha$.

Hver symmetri har det vi kaller en *invers* symmetri. Det er symmetrien som opphever virkningen av den første, og det er lett å tenke seg hvordan den skal realiseres: Enkelt og greit løfter vi kvadratet ut nok en gang og legger det tilbake slik det lå! Den inverse til symmetrien α betegner vi med α^{-1}. Med symboler har vi da at $\alpha^{-1} \circ \alpha = e$. Tilsvarende er $\alpha \circ \alpha^{-1} = e$ — for med litt ettertanke innser vi at α opphever virkningen av α^{-1}.

Fire prinsipper

Det vi har sett til nå, illustrerer tre grunleggende prinsipper for symmeterier, som er modellen for gruppeaksiomene vi senere skal innføre:

- ☐ Symmetrier kan *settes sammen.*
- ☐ Det finnes en *triviell symmetri.*
- ☐ Enhver symmetri har en *invers.*

I tilegg er det et fjerde prinsipp som vi ikke eksplisitt har påpekt, men som hele tiden lå under hva vi gjorde, og det er at sammensetningen av symmetrier er en *assosiativ* operasjon. De betyr at $\alpha \circ (\beta \circ \gamma) = (\alpha \circ \beta) \circ \gamma$. Det fjerde prinsipp er altså:

- ☐ Sammensetning av symmetrier er en *assosiativ operasjon.*

Regning med rotasjoner

Vi innfører symboler for rotasjonene og lar r_i stå for en rotasjon med $i \cdot 90°$ i positiv retning. Vi har at $r_3 = r_1^{-1}$; en dreining på $270°$ har samme effekt som en på $-90°$, og for r_2's vedkommende er den sin egen invers: Vi har[4] $r_2 \circ r_2 = r_2^2 = e$ fordi to suksessive rotasjoner på $180°$ naturligvis er én på $360°$. Det klart at $r_2 = r_1^2$ siden to suksessive rotasjoner hver på $90°$ gir én på $180°$. Likeledes er $r_3 = r_1^3$.

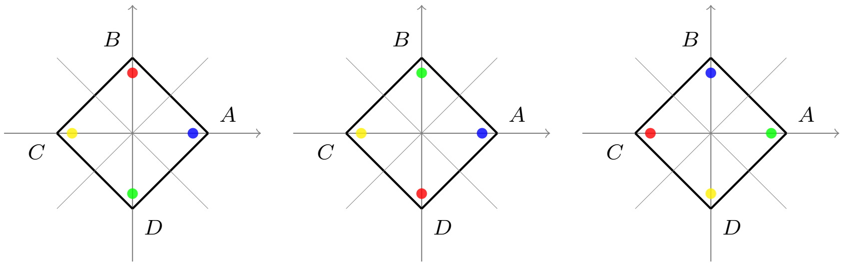
Vi forenkler nå notasjonen, sløyfer indeksen og skriver r for r_1, og r^i med en passende i for alle de andre rotasjonene. De fire rotasjonene er r, r^2, r^3 og e, og for å regne med dem, eller finne relasjoner mellom dem, er alt vi trenger regnereglene for potenser og den fundamentale relasjonen $r^4 = e$. Som et eksempel, det følger direkte fra den at $r^{-1} = r^3$.

Sammensetning av speilinger

Det hører med til en fullstendig forståelse av symmetriene til kvadratet å forstå hva sammensetningen av de forskjellige symmetriene er. Vi har sette på rotasjonene, men

[4] og nå dropper vi $\circ$-en og skriver r_2^2

hva skjer om vi tar med en eller flere speilinger? For å holde orden i sysakene, er det lurt å følge med på hva som skjer med hjørnene. Det er nå engang slik at hvis det er angitt hvor vi skal plassere hjørnene, vet vi hvordan kvadratet skal ligge.



s_1 $\qquad$ $s_2s_1 = r_1$

Figur 2: *Kvadratet i utgangsposisjon til venstre.*

Vi setter derfor, i tillegg til fargeklattene på kvadratet, merker på treplaten. Hvert av hjørnene markere vi ved hjelp av bokstavene A, B, C og D som på figur 2 ovenfor.

Speilingen gjennom x-aksen betegner vi med s_1 og den gjennom linjen $y = x$ med s_2. På figur 2 er kvadratet avbildet i utgangsposisjon, etter at s_1 har virket og etter at sammensetningen s_2s_1 har virket. Sammenligner vi med figur 1, kjenner vi igjen resultatet. Det er rotasjonen r vi har funnet! Vi har at $s_2s_1 = r$! Hvis man vil ha et mer presist resonnement enn en figurtitting, kan man som sagt følge hjørnene[5]:

$$A \xmapsto{s_1} A \xmapsto{s_2} B \xmapsto{s_1} D \xmapsto{s_2} C \xmapsto{s_1} C \xmapsto{s_2} D \xmapsto{s_1} B \xmapsto{s_2} A.$$

Nettoeffekten av dette er altså $A \mapsto B \mapsto C \mapsto D \mapsto A$, som ikke er noe annet en r.

Så hva med s_1s_2? Jo, det følger nå direkte ved regning at $s_1s_2 = r^{-1}$. Vi har nemlig etter hva vi nettopp så, at $s_1s_2r = s_1s_2s_2s_1 = s_1s_1 = e$, siden $s_1^2 = s_2^2 = e$, og "ganger" vi med r^{-1} på begge sider, finner vi $s_1s_2 = r^{-1}$.

Strukturen til symmetrigruppen

Vi skifter nå navn på s_1 for å forenkle notasjonen og lar $s = s_1$. Alle de åtte kvadratsymmetriene kan, som vi snart skal se, uttrykkes ved hjelp av bare to av dem, nemlig s og r. Før vi går videre, trenger vi én relasjon til mellom disse, i tillegg til de to vi allerede har sett, nemlig at $r^4 = e$ og $s^2 = e$. Det er følgende:

$$srs = r^{-1}, \tag{$\circledast$}$$

og den vi finner vi ved å bruke hva vi så langt har gjort: $srs = s_1s_2s_1s_1 = s_1s_2 = r^{-1}$.

[5]Om X og Y er to hjørner og s en symmetri, betyr skrivemåten $X \xmapsto{s} Y$ at symmetrien s flytter fargeklatten i hjørnet X til hjørnet Y.

Gruppen D_8 er ikke *kommutativ*. Symmetriene rs og sr er forskjellige, så i et uttrykk vil rekkefølgen til r og s være avgjørende, men relasjonen (✻) redder oss. Den sier at vi kan bytte om r og s bare vi inverterer r. Og det, sammen med at $s^2 = r^4 = e$, er nok til at vi kan regne i D_8.

Speilingen gjennom x-aksen er per definisjon lik s, og vi har sjekket at speilingen s_2 gjennom linjen $y = x$ tilfredstiller $s_2 = rs$. De to siste speilingene kan uttrykkes ved r og s som følger: Speiling gjennom y-aksen er gitt som r^2s, og speiling gjennom linjen $y = -x$ som $r^{-1}s$ (Sjekke dette ved å følge hjørnene!). Vi har altså funnet at

$$D_8 = \{e, r, r^2, r^{-1}, s, rs, r^2s, r^{-1}s\},$$

og som mer er, ethvert "regnestykke" som involverer symmetriene til kvadratet, kan utføres ved å bruke vanlige potensregler og de tre relasjonene $r^4 = s^2 = e$ og $srs = r^{-1}$. Skulle man få et anfall av symmetroia, og for eksempel lure på hva sr^3sr^2sr er for noe, finner man lett

$$sr^3sr^2sr = sr^{-1}sr^2sr = rssr^2sr = r^3sr = r^2s,$$

som altså representerer speiling gjennom y-aksen.

Moralen

Moralen er at vi har beskrevet en mekanisme til å omgjøre resonnementer rundt symmetrier av kvadratet — som kan fremstå krevende rent geomtrisk — til algebraiske manipulasjoner av uttrykk i r og s, der vi følger helt presise algebraiske lover: For det første gruppelovene, som er av generall natur, og dertil de lovene som vi spesifikt har utledet for gruppen D_8.

Vi har sett på et relativt ukomplisert eksempel, men man lett forestille seg at i mer kompliserte tilfeller vil de geometriske argumentene være ugjørlige, mens de algebraiske manipulasjonene forsatt vil være gjennomførbare.

Tilslutt en kommentar. I denne fremstillingen har vi valgt å bruke r og s - altså en rotasjon og en speiling — som *generatorer* for D_8. Det er andre mulige valg, for eksempel kunne vi også brukt to speilinger med symmetrilinjer som *ikke* er ortogonale, for eksempel s_1 og s_2.

Oppgaver

OPPGAVE 1. Sjekk ved regning at r^2s har kvadrat lik e. ✷

OPPGAVE 2. Sjekk ved å følge hjørner at $s_1s_2 = r^{-1}$. ✷

OPPGAVE 3. Sjekk påstanden om symmetriaksene til $r^{-1}s$ og r^2s? ✷

OPPGAVE 4. Vis at r^2 kommuterer med alle andre symmetrier. Vi minner om at to symmetrier sies å *kommutere* dersom $\alpha\beta = \beta\alpha$. ✷

OPPGAVE 5. Hvor mange symmetrier er lik sin egen invers? Hvilke er det ikke? ✷

OPPGAVE 6. Vis at to speilinger kommuterer hvis og bare hvis deres symmetrilinjer er ortogonale. ✷

OPPGAVE 7. Vis at symmetrigruppen D_6 til en regulær trekant har 6 elementer, tre speilinger og to rotasjoner. Vis at hvis r og s er henholdsvis en rotasjon og en speiling, så er

$$D_6 = \{e, r, r^{-1}, s, rs, r^{-1}s\}$$

og regnereglene er $s^2 = r^3 = e$ og $srs = r^{-1}$. ✷

OPPGAVE 8. La s_1 og s_2 være som i teksten, *i.e.,* speiling om x-aksen og om linjen $y = x$.

a) Vis at

$$s_1 s_2 s_1 s_2 = s_2 s_1 s_2 s_1$$

b) Vis at s_1 og s_2 genererer D_8, mer spesifikt, at

$$D_8 = \{e, s_1, s_2, s_1 s_2, s_2 s_1, s_1 s_2 s_1, s_2 s_1 s_2, s_1 s_2 s_1 s_2\}$$

✷