Forelesning 15. januar 2024

Strukturer:

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{Z} = \{\dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$

$\mathbb{R}$: reelle tall

$\mathbb{C}$: Komplekse tall

$M_n(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \mid a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$

$GL_n(\mathbb{R}) = \{ M \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det(M) \neq 0 \}$

$\mathbb{C}[X] = \{ p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m \mid a_i \in \mathbb{C} \}$

$S_n = \{ \sigma : \{1, \dots, n\} \circlearrowleft \mid \text{bijektiv} \}$

$Sym(P) = \{$ symmetrier av figur $P \}$

$= \{ m : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \text{isometri} \mid m(P) = P \}$.

Binære operasjoner

(Bi = 2)

$$S \times S \xrightarrow{*} S$$

$$*(a, b) = a * b$$

Eksempler: 1) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \xrightarrow{+} \mathbb{Z}$

$(2, 3) \longmapsto 5$

2) $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \xrightarrow{\cdot} \mathbb{Q}$

$\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) \longmapsto \frac{3}{8}$

3) $M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$

$\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) \longmapsto \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ matrisemultiplikasjon

4) $M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$

$\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) \longmapsto \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ addisjon

5) $\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right) \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(12)

$(13)(24)$

$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{matrix}$

$(13)(24)(12) = (1423)$

Def. 2.11

En binær operasjon $*$ på en mengde S er KOMMUTATIV dersom $a * b = b * a \quad \forall a,b \in S$

Eks: 1) $2+3=3+2$

2) $2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$

KOMMUTATIV

3) $(13)(24)(12) = (1423)$

$(12)(13)(24) = (1324)$

IKKE KOMMUTATIV

Def 2.12

En binær operasjon $*$ på S er ASSOSIATIV dersom $a*(b*c) = (a*b)*c \quad \forall a,b,c \in S$

Eks. S: mengde av funksjoner

$$f(g\,h)(x) = f(g(h(x)))$$
$$(f\,g)\,h(x) = f(g(h(x)))$$

Tabeller for binære operasjoner

$*$	a	b	c	d
a	b	c	d	a
b	c	d	a	b
c	d	a	b	c
d	a	b	c	d

Kommutativ (symmetrisk om diagonalen)

Assosiativ: sjekk 64 kombinasjoner

$(x*y)*z = x*(y*z)$

Eks. $(a*a)*a) = b*a = c$

$a*(a*a) = a*b = c$

Tre like $(x*x)*x = x*(x*x)$ Følger fra kommutativitet

To like $(x*y)*x = x*(y*x)$ — " —

$(x*x)*y = x*(x*y)$ $\frac{16}{2}$ som må sjekkes

Ingen like $(x*y)*z = x*(y*z)$ $\binom{4}{3} \cdot 3! \cdot \frac{1}{2} = 12$ som må sjekkes

Noen spørsmål:

1. La $S=\{a\}$ og $*: S\times S \to S$ en binær operasjon
   Er $*$ kommutativ? Assosiativ?
2. La $S=\{a,b\}$. Hvor mange binære operasjoner kan vi lage? Hvor mange er kommutative og hvor mange er assosiative?
3. Matrisemultiplikasjon $M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$
   Kommutativ? Assosiativ?

Isomorfe strukturer (Iso = lik Morf = form)

$(S,*)$, $(T,\circ)$ isomorfe dersom

$\exists\ \varphi: S \to T$ bijektiv (injektiv og surjektiv) (1-1 og På)

slik at

$$\varphi(a*b) = \varphi(a) \circ \varphi(b)$$

Vi skriver $S \cong T$ eller $(S,*) \cong (T,\circ)$

Eks

$*$	a	b
a	b	b
b	b	a

$\circ$	a	b
a	b	a
b	a	a

$\varphi: \begin{matrix} a \mapsto b \\ b \mapsto a \end{matrix}$ injektiv og surjektiv

$\varphi(a*a) = \varphi(b) = a$ $\quad \varphi(a)\circ\varphi(a) = b\circ b = a$

$\varphi(a*b) = \varphi(b) = a$ $\quad \varphi(a)\circ\varphi(b) = b\circ a = a$

$\varphi(b*a) = \varphi(b) = a$ $\quad \varphi(b)\circ\varphi(a) = a\circ b = a$

$\varphi(b*b) = \varphi(a) = b$ $\quad \varphi(b)\circ\varphi(b) = a\circ a = b$

(Byttet bare om på elementene: permutasjoner)

Ny tabell: $\varphi(a)\circ\varphi(b) = \varphi(a*b)$ som definisjon.

$$\mathbb{C} = \{a+ib \mid a,b \in \mathbb{R},\ i^2 = -1\}$$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a,b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$(a+ib)\cdot(c+id) \longmapsto (ac-bd+i(ad+bc))$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -ad-bc & ac-bd \end{pmatrix}$$

Noen flere definisjoner:

Def 3.12. $(S,*)$ binær struktur. $e \in S$ kalles et IDENTITETSELEMENT dersom $e*a = a*e = a \quad \forall a \in S$

Thm 3.13 Entydighet av identitetselementer

Bevis. Anta at vi har to identitetselementer e, e'
Da har vi

$$e = e*e' = e'$$

QED.

Thm 3.14 Isomorfier tar identitetselementer på identitetselementer

Bevis. $\varphi : (S,*) \longrightarrow (T,\circ)$

Surjektivitet betyr at $\forall t \in T,\ \exists s \in S$ slik at $\varphi(s) = t$

$$\varphi(e)\circ t = \varphi(e)\circ\varphi(s) = \varphi(e*s) = \varphi(s) = t$$

Entydighet av identitetselement gir resultatet. QED

Def. 2.4. $(S,*)$ binær struktur. $H \subseteq S$ delmengde. H er LUKKET under $*$ dersom $a*b \in H \quad \forall a,b \in H$.